université PARIS DIDEROT PARIS 7

2014-2015

Master 2ème année de Mathématiques Fondamentales

Responsable pédagogique : Marc Rosso

http://www.math.univ-paris-diderot.fr/formations/masters/math/m2-mathfonda

Table des matières

Cours de base (1er semestre) **4**

Cours spécialisés (2ème semestre) **4**

Tableau des cours par filières **5**

Les renseignements administratifs **7**

Les contacts 7

Le Calendrier 2014/2015 8

L'inscription 9

Structure du Master 2 10

Modalités du contrôle des connaissances 11

Bourse et/ou logement en résidence universitaire 12

Bibliothèque, groupes de travail 12

Le Doctorat de mathématiques 13

Modalités d'inscription en thèse de doctorat à l'Université Paris Diderot 13

Le contrat doctoral 13

Programme des Cours de base **14**

GÉOMÉTRIE DES PARTICULES I ET II (9+9 ECTS) 15
REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DES GROUPES FINIS ET GROUPES DE RÉFLEXIONS (9+9 ECTS) 16
RECTIFIABILITÉ ET COURANTS (9 ECTS) 17
THÉORIE DE LIE ET REPRÉSENTATIONS I ET II (9+9 ECTS) 18
COURBES ÉLLIPTIQUES (9 ECTS) 20
ANALYSE DES EDP (9 ECTS) 21
FLUIDES PARFAITS INCOMPRESSIBLES (9 ECTS) 22
COMPLÉMENTS D'ANALYSE : THÉORIE DE LA MESURE ET ANALYSE SPECTRALE (9 ECTS) 23
THÉORIE ALGÉBRIQUE DES NOMBRES (9 ECTS) 24
ALGÈBRES D'OPÉRATEURS ET APPLICATIONS (9 ECTS) 25
TOPOLOGIE DIFFÉRENTIELLE (9+9 ECTS) 26

Programme des Cours spécialisés **27**

GÉOMÉTRIE DES PARTICULES I ET II (9+9 ECTS) 28
HOMOLOGIE DE HEEGAARD-FLOER (9 ECTS) 29
TOPOLOGIE DES VARIÉTÉS DE PETITE DIMENSION (9 ECTS) 30
PROBLÈMES VARIATIONNELS GÉOMÉTRIQUES ET GÉOMÉTRIE SEMI-ALGÉBRIQUE RÉELLE (9 ECTS) 31
INTRODUCTION AUX EDP STOCHASTIQUES ET A LA THÉORIE DE TURBULENCE (9+9 ECTS) 32
VARIÉTÉS HAMILTONIENNES ET QUANTIFICATION GÉOMÉTRIQUE (9+9 ECTS) 33
ALGÈBRES D'OPÉRATEURS ET APPLICATIONS (9 ECTS) 34

Programme des Cours d'ouverture **35**

LES CATÉGORIES : UNE MÉTHODOLOGIE POUR LES MATHÉMATIQUES (3 ECTS) 36

Cours de base (1er semestre)

Réunion d'information le **Vendredi 5 septembre 2014** à 14h30 en salle 1021, 1er étage du Bât. S. Germain
Début des cours le lundi 8 septembre 2014
Cours de 4 heures hebdomadaires (sauf cas particulier), groupes de travail de 2 heures hebdomadaires.

Géométrie des particules I	Daniel Bennequin
Représentations linéaires des groupes finis Introduction aux groupes de réflexions	Michel Broué
Rectifiabilité et courants	Thierry De Pauw
Théorie de Lie et représentations I Théorie de Lie et représentations II	M. Harris et D. Hernandez David Hernandez
Courbes elliptiques	Marc Hindry
Analyse des EDP Fluides parfaits incompressibles	Christophe Lacave
Complément d'analyse : théorie de la mesure et analyse spectrale	Paul Laurain
Théorie algébrique des nombres	Loïc Mérel
Algèbres de Von Heumann	Georges Skandalis
Topologie différentielle I & II	Anton Zorich
C* algèbres	Andrzej Zuk

Cours spécialisés (2ème semestre)

début des cours : début janvier 2015
Cours de 4 heures hebdomadaires

Géométrie des particules II	Daniel Bennequin
Topologie des variétés de petite dimension Homologie de Heegard-Floer	Christian Blanchet
Problèmes variationnels géométriques et géométrie semi-algébrique réelle	Thierry de Pauw
Introduction aux EDP stochastiques et à la théorie de turbulence I & II	Sergei Kuksin
Variétés hamiltoniennes et quantification géométrique I & II	Xiaonan Ma
Algèbres d'opérateurs : applications et exemples issus de la théorie géométrique des groupes	Andrzej Zuk

Tableau des cours par filières

Algèbres d'opérateurs, Géométrie non commutative :

Algèbres de Von Heumann	Georges Skandalis	1er semestre	9 ECTS
C* algèbres	Andrzej Zuk	1er semestre	9 ECTS
Algèbres d'opérateurs : applications et exemples issus de la théorie géométrique des groupes	Andrzej Zuk	2ème semestre	9 ECTS

Algèbre, groupes et représentations :

Représentations linéaires des groupes finis Introduction aux groupes de réflexions	Michel Broué	1er semestre	9 ECTS 9 ECTS
Théorie de Lie et représentations I	M. Harris et D. Hernandez	1er semestre	9 ECTS
Théorie de Lie et représentations II	David Hernandez	1er semestre	9 ECTS

Topologie algébrique :

Topologie des variétés de petite dimension Homologie de Heegard-Floer	Christian Blanchet	2ème semestre	9 ECTS 9 ECTS

Analyse, EDP :

Introduction aux EDP stochastiques et à la théorie de turbulence I & II	Sergei Kuksin	2ème semestre	9+9 ECTS
Analyse des EDP Fluides parfaits incompressibles	Christophe Lacave	1er semestre	9 ECTS 9 ECTS
Compléments d'analyse : théorie de la mesure et analyse spectrale	Paul Laurain	1er semestre	9 ECTS

Géométrie et dynamique :

Rectifiabilité et courants	Thierry De Pauw	1er semestre	9 ECTS
Problèmes variationnels géométriques et géométrie semi-algébrique réelle	Thierry De Pauw	2ème semestre	9 ECTS
Variétés hamiltoniennes et quantification géométrique I & II	Xiaonan Ma	2ème semestre	9+9 ECTS
Topologie différentielle I & II	Anton Zorich	1er semestre	9+9 ECTS

Théorie des nombres :

Théorie algébrique des nombres	Loic Mérel	1er semestre	9 ECTS

Physique Mathématique :

Géométrie des particules I	Daniel Bennequin	1er semestre	9 ECTS
Géométrie des particules II	Daniel Bennequin	2ème semestre	9 ECTS

Les renseignements administratifs

Les contacts

Le responsable de la formation : **Marc ROSSO** rosso@imj-prg.fr 01 57 27 92 11	**Lui écrire** Université Paris Diderot – Paris 7 UFR de Mathématiques Bâtiment Sophie Germain Case 7012 75205 Paris cedex 13 **Le rencontrer** Site Paris Rive Gauche (13ème) Bâtiment Sophie Germain 8 place FM/13 (en cours de nomination) entrée au croisement de l'av. de France et de la rue Alice-Dormon et Léonie-Duquet 6ème étage, bureau 6017
Le secrétariat **du Master 2 de** **Mathématiques Fondamentales :** Catherine Prudlo catherine.prudlo@univ-paris-diderot.fr 01 57 27 93 06 01 57 27 91 40	**Correspondre** Université Paris Diderot – Paris 7 UFR de Mathématiques Scolarité des Masters 2 Bâtiment Sophie Germain Case 7012 75205 Paris cedex 13 **S'y rendre** Site Paris Rive Gauche (13ème) Bâtiment Sophie Germain 8 place FM/13 (en cours de nomination) entrée au croisement de l'av. de France et de la rue Alice-Dormon et Léonie-Duquet 5ème étage, bureau 5055

Le Calendrier 2014/2015

5 Septembre	Réunion d'information
5 septembre	Date limite de dépôt des dossiers de candidature
8 septembre	Début des cours du 1er semestre
15 octobre	Date limite pour l'inscription administrative auprès de la scolarité centrale (DEVU)
31 octobre	Date limite pour l'inscription pédagogique auprès du secrétariat du M2 (indication des cours suivis)
Fin octobre	Examens de la 1ère partie du 1er semestre
Fin décembre Début janvier	Session d'examen pour les cours de la 2ème partie du 1er semestre
Janvier	Début des cours du 2ème semestre et inscription pédagogique au secrétariat
Fin février	Examens de la 1ère partie du second semestre Choix du directeur de stage (convention de stage à établir en ligne)
Avril	Session d'examen pour les cours de la 2ème partie du 2ème semestre
Mai-Juin	Campagne de recrutement pour les contrats doctoraux
Juin	Session de rattrapage
30 juin	Date limite de soutenance du rapport de stage pour la session 1
Début juillet	Attribution des contrats doctoraux
30 septembre	Date limite de soutenance du rapport de stage pour la session 2

L'inscription

Conditions d'inscription

La 2ème année de Master (M2) se place normalement en 5ème année des études universitaires.
L'accès en M2 est réservé aux étudiants titulaires :

- d'un master 1, d'une maîtrise de Mathématiques
- ou d'un diplôme équivalent sanctionnant 4 années d'études universitaires (diplômes universitaires étrangers, diplôme d'ingénieur, diplôme d'une Grande Ecole,…)

Modalités d'inscription

- **Candidature des étudiants étrangers :**
  Afin de faciliter la mobilité internationale, l'Université Paris Diderot adhère à l'Agence Campus France.
  Nous invitons les étudiants à se renseigner sur le site de Campus France :
  http://www.campusfrance.org/fr et à s'inscrire auprès de cet organisme avant mars 2014.

- **Pour toutes les autres candidatures :** les étudiants doivent déposer une demande de pré-inscription sur le site web : https://ecandidat.app.univ-paris-diderot.fr

  Dates limites de préinscription sur ecandidat :
  Du 5 avril au 23 juillet 2014
  Du 25 août au 5 septembre 2014

Dates de retour du dossier

- **Avant le 12 juillet 2014** pour un examen de votre dossier de candidature à la session de juillet,
- **Avant le 5 septembre 2014** pour un examen du dossier de candidature à la session de septembre.

à envoyer ou à déposer :

Envoi	Dépôt
Université Paris Diderot – Paris 7 UFR de Mathématiques Scolarité des Masters 2 Bâtiment Sophie Germain Case 7012 75205 Paris cedex 13	De 9 à 12 h et de 14 à 17 h du lundi au vendredi Site Paris Rive Gauche (13ème) Bâtiment Sophie Germain 8 place FM/13 (en cours de nomination) entrée au croisement de l'av. de France et de la rue Alice-Dormon et Léonie-Duquet 5ème étage, bureau 5055

Inscription administrative

Dans le cas d'une réponse favorable, l'étudiant recevra un mail et devra prendre rendez-vous par l'intermédiaire du site e-candidat en vue de l'inscription administrative auprès de la Direction des Etudes et de la Vie Universitaire (DEVU). Il devra se munir de toutes les pièces justificatives mentionnées dans ce message.

Date limite d'inscription administrative : 15 octobre 2014

Structure du Master 2

Partie théorique	• Trois UE dont au moins une UE Fondamentale (1er semestre) et une UE d'orientation (2ème semestre). La troisième UE est choisie soit parmi les UE Fondamentales soit parmi les UE d'Orientation (9+9+9 = 27 ECTS)
Partie pratique	• Une UE de stage - 30 ECTS - sous la direction d'un enseignant ou chercheur d'un laboratoire associé : lecture et résumé d'articles de recherche récents, rédaction d'un mémoire, ou d'un cours...
UE d'ouverture	• Une UE d'ouverture - 3 ECTS - (au 1er ou 2ème semestre)

Les cours de 9+9 ECTS sont enseignés pendant tout le semestre sur une base de 4 heures par semaine. Un examen au milieu du semestre permet de valider la moitié du cours (9 ECTS).

Les cours de 9 ECTS sont en général enseignés pendant la moitié du semestre sur une base de 4 heures par semaine. Certains cours de 9 ECTS sont enseignés pendant tout le semestre sur une base de 2 heures par semaine.

Le choix des cours

- **Les cours de base** doivent être choisis dans la liste des cours du M2 « Mathématiques Fondamentales ». Ils sont soutenus par un groupe de travail dont les activités concourent à l'assimilation du cours de base et à la préparation de l'examen qui le sanctionne.

- **Les cours spécialisés** sont pris en principe dans la liste des cours spécialisés du M2 de Mathématiques Fondamentales.

  Ils peuvent également être choisis parmi les cours de M2 extérieurs, sous réserve de l'accord préalable du responsable du M2, et à condition de correspondre au même volume horaire.
  Voici une liste non restrictive de M2 extérieurs possibles :

  - M2 Mathématiques Fondamentales à Paris 6
  - M2 Mathématiques Pures à Paris 11
  - M2 Mathématiques à Paris 13

  Il existe d'autres possibilités parmi divers cours de M2 de la région parisienne.

- **L'unité d'ouverture** correspond à des activités complémentaires choisies en accord avec le responsable du M2. Parmi les possibilités : exposé oral et/ou écrit dans le cadre d'un groupe de travail, rapport écrit et/ou oral ou séminaire « extérieur », etc…

L'étudiant devra informer régulièrement le Secrétariat du M2 de l'UFR de Mathématiques de ses choix (cours de base, cours spécialisé, directeur de stage, demande d'allocation de recherches…). Il devra particulièrement le faire en début de second semestre pour l'indication des cours spécialisés, de l'unité d'ouverture et du directeur de stage.

Modalités du contrôle des connaissances

Pour obtenir le diplôme de Master, l'étudiant doit être reçu à chacune des cinq épreuves composant son diplôme, soit :

<table>
<tr><th>Partie théorique</th><th>Partie pratique</th><th>Ouverture</th></tr>
<tr><td>1 UE fondamentale 9 ECTS</td><td rowspan="3">Stage 30 ECTS</td><td rowspan="3">UE d'ouverture 3 ECTS</td></tr>
<tr><td>1 UE d'orientation 9 ECTS</td></tr>
<tr><td>1 UE fondamentale ou d'orientation 9 ECTS</td></tr>
</table>

Chaque cours de la **partie théorique** est sanctionné par des épreuves écrites, de 3 heures, accompagnées, le cas échéant, si la note d'écrit, sur 20, est ≥ 8, et < 10, d'un oral de rattrapage.
Pour chaque cours, la note finale est donnée sur 20.
Seules sont prises en compte dans cette évaluation les UE pour lesquelles la note obtenue est ≥ 10.

Les dates et les horaires des **examens** sont affichés au 5ème étage du bâtiment Sophie Germain, à gauche lorsque l'on sort du palier des ascenseurs. Ils sont également disponibles sur le site du M2, un mois auparavant. Il n'y a pas de convocation individuelle.

Le stage (en général d'une durée de 3 mois) donne lieu :

- à la rédaction d'un mémoire
- à une soutenance orale devant un collège comprenant au moins 2 membres habilités à diriger des recherches.

Il fait l'objet d'un rapport du directeur de stage et est sanctionné par une note sur 20.

La soutenance doit :

- Se dérouler avant le 30 juin pour une prise en compte de la note en session 1 ;
- Se dérouler avant le 30 septembre pour une prise en compte de la note en session 2.

Le M2 est délivré avec pour note globale la « moyenne pondérée » des notes obtenues dans chacune des catégories d'UE ci-dessus. Dans chaque catégorie, seules sont conservées pour le calcul, des notes correspondant au nombre d'ECTS requis. La note globale est sur 20.

Bourse et/ou logement en résidence universitaire

Le ministère chargé de l'Enseignement supérieur accorde aux étudiants un certain nombre d'aides gérées par le Crous, en lien avec les universités : bourses sur les critères sociaux, aide d'urgence annuelle, passeport de mobilité, prêts d'honneur, l'aide au mérite…

Pour de plus amples informations, vous devez prendre contact avec :

- le service social de l'Université Paris Diderot :
http://www.univ-paris-diderot.fr/sc/site.php?bc=vie_etudiante&np=Aides

- le CNOUS : http://www.cnous.fr

Bibliothèque, groupes de travail

Bibliothèque

La bibliothèque Mathématiques Informatique Recherche : http://www.biblio.math.jussieu.fr
située dans le bâtiment Sophie Germain, 8ème étage, Place FM/13, 75013 Paris est à la disposition des étudiants du M2. Il est également possible d'emprunter un Ipad à domicile pour une durée d'un mois, renouvelable un mois.

Groupes de travail

Des groupes de travail et séminaires d'initiation à la recherche sont organisés dans certains domaines et les étudiants sont vivement invités à y participer.

Ecoles d'été

Les étudiants peuvent être amenés à suivre d'autres activités d'initiation à la recherche : écoles d'été, congrès, séminaires…

Le Doctorat de mathématiques

Le doctorat débute normalement en 6ème année des études universitaires et s'adresse aux étudiants titulaires d'un M2 ou d'un titre de niveau équivalent.

La durée conseillée des études doctorales est de 3 ans.
Une année supplémentaire peut être accordée après examen du dossier (incluant un rapport du directeur de thèse prouvant l'avancement des travaux) et autorisation du Directeur de thèse, du Directeur de l'Ecole Doctorale et du Président de l'Université.

Modalités d'inscription en thèse de doctorat à l'Université Paris Diderot

Les étudiants titulaires du M2 peuvent, l'année suivante, s'inscrire en Diplôme de Doctorat de Mathématiques après avoir au préalable obtenu l'accord d'un Directeur de recherche et du Directeur de l'Ecole Doctorale. Afin de candidater pour une inscription en doctorat, ils devront se connecter sur le site web suivant : http://sesame.univ-paris-diderot.fr

Pour l'examen de leurs demandes, les étudiants devront déposer auprès du Bureau de l'Ecole Doctorale (Bureau 5056) de juin à octobre environ, les documents suivants :

- Une lettre exposant la nature de la recherche envisagée et le projet de thèse,
- Un curriculum vitae détaillé,
- Une lettre de recommandation rédigée par l'enseignant du M2 (ce point ne concerne pas les étudiants qui ont obtenus le M2 à Paris 7)
- Le détail des résultats obtenus en M2 (aux examens et au stage, avec indication des enseignants et des intitulés correspondants)
- L'attestation de M2 (provisoire ou définitive) délivrée par l'université d'origine
- L'attestation de financement

A titre indicatif pour l'année 2014-2015 :
- Date limite de dépôts des dossiers de préinscription en doctorat : 15 novembre 2014
- Date limite des inscriptions administratives : 15 décembre 2014

Le contrat doctoral

Le dossier de candidature est à remettre au secrétariat de l'Ecole Doctorale de Paris Centre avant la mi-juin 2015 (bâtiment Sophie Germain, 5ème étage, bureau 5056 pour les candidatures de Paris Diderot).

Les résultats des attributions des contrats doctoraux seront annoncés début juillet 2015.

Programme des Cours de base

GEOMETRIE DES PARTICULES I et II (9+9 ECTS)
Daniel Bennequin
1er et 2nd semestres

Cours en deux parties, la première en fin du premier semestre, et la deuxième en début du deuxième semestre.

Présentation

Exposé mathématique du cadre en géométrie différentielle qui permet de comprendre l'énoncé des équations aux dérivées partielles fondamentales de la dynamique des particules élémentaires en interaction au niveau semi-classique, contenant aussi une introduction au problème de la quantification et une introduction aux équations super-symétriques. L'idée est d'expliquer ce que sont x et F dans dx/dt=F(x,t) pour les champs quantiques et leurs limites semi-classiques.

Programme

Géométrie des particules I (9 ECTS) – 1er Semestre :

1) Variétés, fibrations, tenseurs, formes différentielles. Groupes et algèbres de Lie
2) Fibrés principaux, connexions principales, fibrés associés, connexions linéaires
3) Métriques de Riemann et de Lorentz, spineurs
4) Équations d'Einstein, de Dirac, de Maxwell, de Yang-Mills-Higgs

Géométrie des particules II (9 ECTS) – 2nd Semestre :

1) Super-variétés, super-symétries
2) Représentations unitaires du groupe de Poincaré et super-Poincaré, interprétation des équations fondamentales,
3) Introduction à la quantification des champs

Connaissances requises

Un niveau de M1 de Maths est requis, si possible avec un cours de base de Géométrie différentielle.

Bibliographie

[1] C.H.Taubes, "Differential Geometry. Bundles, connections, metrics and curvatures", Oxford, 2012;

[2] S.Varadarajan, "Supersymmetry for mathematicians: an introduction", AMS, 2004;

[3] G.t'Hooft "Under the spell of the gauge principle", World Scientific, 1994;

[4] A.M.Polyakov "Gauge fields and strings" CRC Press, 1987.

REPRESENTATIONS LINEAIRES DES GROUPES FINIS ET GROUPES DE REFLEXIONS (9+9 ECTS)
Michel Broué
1er Semestre - TD par Olivier Brunat

Présentation

La première partie du cours sera consacrée à la théorie classique (en caractéristique zéro) des représentations linéaires des groupes finis, et à la théorie des caractères de Schur-Frobenius. On suivra, avec quelques variations et autres détours, l'ouvrage de J.-P. Serre [JPS]. Les outils essentiels en sont l'algèbre linéaire et des rudiments de théorie des nombres, qui se combinent pour construire une théorie particulièrement agréable et efficace. Les résultats présentés sont à la base de tous les développements de la très active "théorie des représentations".

La deuxième partie s'appuie sur la première, en développant en particulier la notion de "caractères gradués". Elle est une introduction aux groupes finis engendrés par des réflexions. On les caractérisera par la structure de leurs invariants polynomiaux, et pour ce faire on présentera — parfois sans démonstration — quelques résultats plus avancés d'algèbre commutative. On étudiera ensuite plus particulièrement les groupes de Coxeter (groupes agissant sur un espace réel et engendrés par des réflexions). Parmi les groupes de Coxeter figurent les groupes de Weyl, squelettes des groupes de Lie ou algébriques, pierre de touche de toutes sortes de domaines des mathématiques.

Programme

Première partie (9 ECTS) : Représentations linéaires des groupes finis.

- Introduction : structure des représentations des groupes finis sur les ensembles.
- Vocabulaire et notations des représentations linéaires.
- Décomposition d'une représentation en représentation irréductibles et en isotypiques.
- Caractères, relations d'orthogonalités, propriétés d'intégralité.
- Représentations et sous-groupes : induction et restriction.
- Théorèmes d'Artin et de Brauer.
- Questions de rationalité, indicateur de Schur.

Le niveau requis est celui d'algèbre de M1. Quelques compléments d'algèbre linéaire seront présentés, tel le produit tensoriel, ainsi que des rudiments au sujet des éléments entiers sur un anneau.

Deuxième partie (9 ECTS) : Introduction aux groupes de réflexions.

- Modules et caractères gradués, théorèmes de normalisation de Noether, invariants polynomiaux de groupes finis, caractérisation des groupes de réflexion.
- Groupes de Coxeter, condition d'échange et lemme de Matsumoto, représentations comme groupes de réflexions réels, diagrammes, classification. Groupes de Weyl.
- If time permits, un peu de groupes de tresses et d'algèbres de Hecke.

Connaissances requises

Algèbre niveau M1.

Bibliographie

[1] [NB] N. Bourbaki, Groupes et Algèbres de Lies, chap. 4, 5, 6
[2] [MB] M. Broué, Introduction to complex reflection groups and their braid groups, Springer LN no 1988
[3] [JPS] J.-P. Serre, Représentations des groupes finis, Hermann

RECTIFIABILITE ET COURANTS (9 ECTS)
Thierry De Pauw
1er Semestre

Présentation

Le but de ce cours est d'introduire les outils fondamentaux de la théorie géométrique de la mesure tels qu'ils s'appliquent, par exemple, à l'étude de problèmes variationnels de nature géométrique (dont la paradigme est le problème de Plateau) posés dans des classes d'homologie de variétés riemanniennes compactes. On se placera dans le cadre classique de l'espace euclidien et l'on y traitera les puissants résultats de la théorie des courants rectifiables de H. Federer et W.H. Fleming.

Programme

I. Rectifiabilité

- Théorèmes de recouvrement (Besicovitch) et dérivation des mesures de Radon
- Applications lipschitziennes ; Théorème de Rademacher
- Mesures de Hausdorff ; densités
- Formules de l'aire et de la co-aire
- Mesures tangentes
- Critères de rectifiabilité

II. Courants

- Préliminaires sur les formes différentielles
- Formule d'homotopie ; régularisation
- Courants normaux et bémol
- Théorème de déformation
- Théorème de compacité et de rectifiabilité
- Inégalité isopérimétrique
- Problème de Plateau dans les classes d'homologie de variétés riemanniennes compactes

Connaissances requises

Théorie générale de la mesure ; formes différentielles.

Bibliographie

[1] E. Bombieri, An introduction to Minimal Currents and Parametric Variational Problems
[2] C. Evans and R. Gariepy, Measure Theory and Fine Properties of Functions
[3] H. Federer and W.H. Fleming, Normal and Integral Currents
[4] H. Federer, Geometric Measure Theory
[5] P. Mattila, Geometry of Measures and Sets in Euclidean Spaces
[6] F. Morgan, Geometric Measure Theory: A beginner's guide
[7] L. Simon, Lectures on Geometric Measure Theory

THEORIE DE LIE ET REPRESENTATIONS I et II (9+9 ECTS)
Michael Harris et David Hernandez
1er semestre

Présentation

La théorie des représentations, notamment des algèbres de Lie, est un sujet central en mathématiques qui a de nombreuses applications à d'autres branches des mathématiques (géométrie, théorie des nombres, combinatoire, topologie...) mais aussi en physique théorique (systèmes intégrables quantiques, théorie conforme des champs...).
Le but de ce cours est double : d'une part donner une introduction aux concepts et outils classiques de la théorie de Lie, notamment en théorie des représentations, et d'autre part étudier des généralisations (de dimension infinie et quantiques) ainsi que certaines de leurs applications importantes.

Programme

1. Groupes et algèbres de Lie de dimension finie

- Algèbres de Lie : définition, notion de représentation, exemples classiques, motivations et lien avec les groupes de Lie.
- Algèbres de Lie nilpotentes, résolubles, semi-simples.
- Catégories de représentations d'une algèbre de Lie, représentations irréductibles, représentations semi-simples. Représentation adjointe.
- Complète réductibilité pour les algèbres de Lie semi-simples (théorème de Weyl).
- Structure des algèbres de Lie semi-simples. Systèmes de racines, groupe de Weyl.

2. Représentations des algèbres de Lie de dimension finie

- Modules de plus haut poids, modules de Verma, modules simples.
- Catégorie $\mathcal{O}$. Paramétrisation des représentations simples. Séries de Jordan-Holder.
- Multiplicité d'une représentation simple dans une représentation de la catégorie $\mathcal{O}$.
- Représentations de dimension finie, paramétrisations par les poids dominants.
- Structure tensorielle, morphisme de caractère, anneau de Grothendieck.

3. Algèbres de Lie de dimension infinie

- Algèbres de Kac-Moody, présentation de Serre.
- Structure des algèbres de Kac-Moody symétrisables. Sous-algèbres de Borel.
- Catégorie $\mathcal{O}_{\text{int}}$ des représentations intégrables dans la catégorie $\mathcal{O}$.
- Représentations extrémales de Kashiwara.
- Algèbres de lacets et extensions. Isomorphisme entre les présentations des algèbres affines.
- Algèbres de Virasoro et de Heisenberg : lien avec les algèbres affines.
- Racines réelles, racines imaginaires.
- Catégorie des représentations de dimension finie. Représentations d'évaluation. Paramétrisation des représentations simples par les polynômes de Drinfeld.

4. Equation de Yang-Baxter, groupes quantiques et systèmes intégrables

- Algèbres de Hopf.
- Algèbres affines quantiques : représentations de dimension finie, polynômes de Drinfeld.
- Equation de Yang-Baxter quantique et *R*-matrice universelle.
- Anneau de Grothendieck et *q*-caractères.
- Matrices de transfert, relations de Baxter.
- Représentations préfondamentales, spectre quantique et systèmes intégrables quantiques.

Connaissances requises

A priori aucune, si ce n'est l'algèbre linéaire standard.

Bibliographie

[1] J-P. Serre, Lie algebras and Lie groups, 1964 lectures given at Harvard University, Lecture Notes in Mathematics, 1500, (2006)

[2] W. Fulton et J. Harris, Representation Theory: A First Course, Graduate Texts in Mathematics, 129 (3ème édition, 2004).

[3] J. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Graduate Texts in Mathematics, 9. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978

[4] V. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[5] D. Hernandez, An Introduction to Affine Kac-Moody Algebras, CTQM Master Class Series 2 (2006), 1–20, http://www.math.jussieu.fr/~hernandez/resumedan2.pdf

[6] V. Chari and A. Pressley, A guide to quantum groups, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[7] P. Etingof, I. Frenkel and A. Kirillov, Lectures on representation theory and Knizhnik-Zamolodchikov equations, Mathematical Surveys and Monographs, 58. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[8] E. Frenkel, Langlands correspondence for loop groups, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 103. Cambridge University Press, Cambridge, 2007

COURBES ELLIPTIQUES (9 ECTS)
Marc Hindry
1er semestre

Présentation

Le but du cours est de présenter les bases de la théorie des courbes elliptiques, principalement du point de vue de la géométrie et de l'arithmétique. On démontrera notamment les deux principaux théorèmes diophantiens classiques de Siegel (finitude des points entiers) et Mordell-Weil (génération finie du groupe des points rationnels) et on abordera quelques outils utilisés notamment dans les travaux de Wiles : courbes modulaires et représentations galoisiennes.

Programme

1. Géométrie des courbes elliptiques : modèle de Weierstrass, loi de groupe, différentielles, isogénies.
2. Courbes elliptiques et tores complexes, courbes modulaires.
3. Courbes elliptiques sur les corps finis et les corps *p*-adiques.
4. Courbes elliptiques sur les corps globaux : hauteur de Néron-Tate, théorème de Mordell, théorème de Siegel.
5. Représentation galoisienne et fonction *L* associées à une courbe elliptique.

Connaissances requises

Les prérequis sont minimaux, essentiellement un peu de théorie algébrique des nombres et un cours d'introduction à la géométrie algébrique (vocabulaire et théorème de Riemann-Roch sur les courbes).

Bibliographie

[9] Silverman J. Arithmetic of Elliptic Curves. Springer 1986.

[10] Silverman J. Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves. Springer 1994.

[11] Notes de cours de Jan Nekovar Elliptic functions and elliptic curves.

http://www.math.jussieu.fr/ nekovar/co/ln/el/

ANALYSE DES EDP (9 ECTS)
Christophe Lacave
1er semestre

Présentation

Nous donnerons dans une première partie les outils standard pour analyser des équations aux dérivées partielles. Nous les appliquerons ensuite sur trois types d'équations linéaires du second ordre (elliptique, hyperbolique et parabolique).

Programme

- Espaces réflexifs, séparables. Compacité faible et faible*.
- Elements de distribution. Espaces de Sobolev.
- Equations elliptiques : équation de Laplace, régularité, principe du maximum et fonctions harmoniques.
- Equations hyperboliques : équation de transport et méthode des caractéristiques.
- Equations paraboliques : équation de la chaleur et équation de réaction diffusion.

Connaissances requises

Théorie de l'intégration (Lebesgue).

Bibliographie

[1] Brézis : Analyse fonctionnelle.

[2] Evans : Partial differential equations.

[3] Gilbarg-Trudinger : Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.

FLUIDES PARFAITS INCOMPRESSIBLES (9 ECTS)
Christophe Lacave
1er semestre

Présentation

L'obtention des équations gouvernant l'évolution des fluides a nécessité plusieurs siècles de travaux : depuis Archimède (297-212 av JC) à Navier et Stokes (1845). Mais même si ces équations sont désormais connues, leur résolution reste l'un des enjeux majeurs de la recherche actuelle (tant d'un point de vue théorique que pratique). A tel point que la fondation Clay y consacre l'un des problèmes du millénaire. Dans ce cours, nous établirons brièvement ces équations dans le cas d'un fluide visqueux (exemple : l'eau) et idéal/parfait (exemple : l'air), puis nous donnerons les principales questions ouvertes concernant les équations de Navier-Stokes (fluide visqueux). Nous travaillerons plus précisément sur les équations d'Euler (fluide idéal) qui présentent une structure particulièrement intéressante en dimension deux (à la frontière entre les problèmes elliptiques, hyperboliques et d'analyse complexe).

Programme

- Dérivation des équations des fluides incompressibles.
- Résumé des principaux résultats sur les fluides visqueux : solution faible de Leray et problème ouvert sur l'unicité des solutions fortes (problème du millénaire).
- Equations d'Euler en dimension N : existence locale de solution régulière (dont l'inégalité de Gagliardo-Niremberg), critère d'explosion de Beale-Kato-Majda.
- Equations d'Euler dans R^2 : quantités conservées en dimension deux, inégalité de Calderon-Zygmund, théorème de Yudovich, formulation lagrangienne, théorème de Delort.
- Equations d'Euler dans les sous-domaines de R^2 : lien entre Euler 2D et le problème de Laplace, décomposition de Hodge deRham et loi de Biot-Savart, utilisation des outils d'analyse complexe pour l'étude des champs harmoniques, stabilité des équations d'Euler par rapport à la déformation du domaine (convergence d'Hausdorff, gamma convergence et capacité), croissance de la norme $W^{1,\infty}$ du tourbillon.

Connaissances requises

Cours d'EDP (intégration de Lebesgue et espaces de Sobolev).

Bibliographie

[1] Chemin : fluides parfaits incompressibles

[2] PL Lions : Mathematical Topics in Fluid Mechanics. Vol1 Incompressible Models

[3] Majda & Bertozzi : vorticity and incompressible flow

COMPLEMENTS D'ANALYSE : THEORIE DE LA MESURE ET ANALYSE SPECTRALE (9 ECTS)

Paul Laurain

1er semestre

Présentation

Ce cours en complément de « Analyse fonctionnelle et initiations aux EDP » se propose de donner des bases solides en analyse en vue des cours plus approfondis. Le point de vue moderne de l'analyse consiste à se placer dans des espaces de fonctions à faible régularité (Sobolev par exemple) afin de regagner en compacité (Théorème de Banach-Alaoglu). Ce point vue s'est avéré très fructueux en analyse mais aussi en géométrie avec la théorie géométrique de la mesure. Ce cours propose donc d'acquérir de solides bases en théorie de la mesure à fin de pourvoir aborder par la suite divers questions d'analyse moderne. Dans une deuxième partie nous regarderons les opérateurs qui agissent sur ces espaces (notamment sur L^2), en particulier des opérateurs différentiels. La théorie spectrale viendra généraliser à des opérateurs agissant sur des espaces de dimensions infinies, les théorèmes spectraux classiques en dimension finie. Enfin, Je tacherai de donner une introduction à la physique quantique qui d'un point de vue mathématique peut être considérée comme une théorie d'opérateurs.

Programme

Les principaux thèmes abordés seront :

1. Rappel de théorie de la mesure, construction de la mesure Lebesgue et mesure de Hausdorff
2. Théorème de Riesz, Radon-Nikodym et quelques conséquences
3. Décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints bornés et non-bornés
4. Application à l'équation de Schrodinger
5. Introduction à la théorie mathématique de la mécanique quantique

Connaissances requises

Ce cours ne nécessite aucun prérequis particulier, si ce n'est les notions d'analyse fonctionnelle du cours "Analyse fonctionnelle et initiations aux EDP". Ce cours est lui même un prérequis au cours de Thierry De Pauw.

Bibliographie

Des notes du cours de 2013 sont disponibles sur ma page Web :
http://www.math.jussieu.fr/~laurainp/cours13-14.html

[1] Cédric Villani, Intégration et Analyse de Fourier, http://cedricvillani.org/wp-content/uploads/2013/03/IAF.pdf , 2010.

[2] Frédéric Hélein, Cours de théorie spectrale, http://www.math.jussieu.fr/~helein/polyspec.pdf , 2010.

[3] D. Choimet et H. Queffelec, Les grands théorèmes d'analyse du 20ième siècle, http://cedricvillani.org/wp-content/uploads/2013/03/IAF.pdf , 2008.

[4] Anton Deitmar et Siegfried Echterhoff, Principles of Harmonic Analysis, Springer, 2008.

[5] Brian C. Hall, Quantum theory for mathematician, Springer, 2013.

THEORIE ALGEBRIQUE DES NOMBRES (9 ECTS)
Loic Mérel
1er semestre

Présentation

Ce cours traitera des notions de base de la théorie algébrique des nombres en vue des géométries algébrique et arithmétique, de la théorie des formes automorphes, de la théorie analytique des nombres.

Programme

- Les notions suivantes seront abordées en cours :
- Les valeurs absolues de Q (théorème d'Ostrovski)
- Anneaux de Dedekind
- Théorie de Galois locale pour les extensions de corps de nombres
- Discriminants
- Finitude du groupe des classes
- Théorème des unités
- Corps p-adiques
- Fonctions zêta de Dedekind
- Formule du nombre de classe
- Théorème de Chebotarev (généralisation du théorème de la progression arithmétique).

Connaissances requises

Les connaissances d'algèbre nécessaires seront les suivantes : quelques notions d'algèbre commutative (modules, anneaux principaux, de Dedekind, locaux), théorie de Galois, corps finis.
En arithmétique, on supposera connu le théorème de la progression arithmétique.
En analyse complexe, on supposera connues les notions de licence (prolongement analytique etc.).

Bibliographie

[1] P. Samuel, Théorie algébrique des nombres

[2] J-P. Serre, Corps locaux

[3] R. Schoof, Catalan's conjecture

[4] S. Lang, Algebraic number theory

[5] J. Cassels-J. Fröhlich, Algebraic number theory

De plus un polycopié servira de référence.

ALGEBRES D'OPERATEURS ET APPLICATIONS (9 ECTS)

Andrzej Zuk et Georges Skandalis

1er semestre

Présentation

Le but de la géométrie non commutative est d'utiliser des outils de la géométrie différentielle pour l'étude de certaines algèbres non commutatives, qui apparaissent naturellement à la fois en mathématique et en physique. Nous étudierons particulièrement l'espace non commutatif dual d'un groupe non abélien.
On commencera par les bases de la théorie des algèbres d'opérateurs. On présentera les notions et théorèmes de base dues à Von Neumann, Gelfand ainsi que d'autres mathématiciens.
On exposera les développements tout récents en relations avec le progrès remarquable en ce qui concerne la théorie de groupes.

Programme

1. Algèbres de Von Neumann - Skandalis (9 ECTS), 1er semestre

- Théorème du bicommutant de Von Neumann
- Théorème de densité Kaplansky
- Théorème de transitivité de Kadison
- Algèbres de Von Neumann de type I
- Classification en types et exemples
- Algèbres de Von Neumann de type II
- Exemples (groupes discrets, actions ergodiques)

2. C* algèbres - Zuk (9 ECTS), 1er semestre

- Construction GNS
- C*-algèbre d'un groupe discret
- L'algèbre des rotations irrationnelles et l'opérateur d'Harper
- Calcul fonctionnel
- Moyennabilité et nuclearité
- Simplicité, exactitude
- Conjecture de Baum-Connes

3. Applications et exemples issus de la théorie géométrique des groupes - Zuk (9ECTS), 2ème semestre

- La propriété (T)
- Graphes expanseurs
- Moyennabilité
- Marches aléatoires
- Groupes d'automates
- Croissance de groupes
- Groupes de torsion
- Invariants L2
- Conjecture de Dixmier

Connaissances requises

Une connaissance d'analyse fonctionnelle est utile

Bibliographie

[1] A. Connes : Noncommutative Geometry, disponible sur http://www.alainconnes.org/docs/book94bigpdf.pdf
[2] V.F.R. Jones : Von Neumann algebras, Notes de cours, disponible sur http://www.math.berkeley.edu/~vfr/VonNeumann.pdf

Des références bibliographiques ponctuelles seront en outre données pendant le cours.

TOPOLOGIE DIFFERENTIELLE (9+9 ECTS)
Anton Zorich
1er semestre - Travaux dirigés par Hussein Mourtada

Présentation

Le but du cours est de faire une passerelle entre le cours de topologie algébrique de base en M1 (où traditionnellement on ne discute pas ou discute peu les variétés) et des cours spécialisés (où on considère les notions de topologie différentielle comme déjà acquises). Ce cours (surtout la théorie de Morse) peut être utile pour les cours spécialisés "Topologie des variétés de petite dimension" et "Homologie de Heegaard-Floer" de Christian Blanchet au deuxième semestre.

Programme

Partie I

1. Transversalité. Variétés et sous-variétés lisses. L'indice d'intersection, degré d'une application.
2. Éléments d'homologie et de cohomologie. Cohomologie de de Rham.
3. Complexes cellulaires, homologie cellulaire.
4. Applications (variétés de Grassmann et cellules de Schubert, notions de classes caractéristiques).

Partie II

1. Théorie de Morse.
2. Les notions de feuilletages et de systèmes dynamiques lisses.

Connaissances requises

Il est souhaitable d'avoir suivi un cours de topologie algébrique et de géométrie différentielle de niveau M1.

Bibliographie

[1] Allen Hatcher. Algebraic Topology.
[2] William Massey. A basic course in algebraic topology.
[3] John Milnor. Topology from the differentiable viewpoint.
[4] John Milnor. Morse Theory.
[5] John Milnor. Lectures on the h-Cobordism Theorem.
[6] John Milnor and James D. Stasheff. Characteristic Classes.
[7] Boris Doubrovin, Anatolii Fomenko, Sergei Novikov.
[8] Modern Geometry - Methods and Applications

La bibliographie sur la topologie différentielle élémentaire est abondante ; il y a plein d'autres livres.

Programme des Cours spécialisés

GEOMETRIE DES PARTICULES I et II (9+9 ECTS)
Daniel Bennequin
1er et 2nd semestres

Cours en deux parties, la première en fin du premier semestre, et la deuxième en début du deuxième semestre.

Présentation

Exposé mathématique du cadre en géométrie différentielle qui permet de comprendre l'énoncé des équations aux dérivées partielles fondamentales de la dynamique des particules élémentaires en interaction au niveau semi-classique, contenant aussi une introduction au problème de la quantification et une introduction aux équations super-symétriques. L'idée est d'expliquer ce que sont x et F dans dx/dt=F(x,t) pour les champs quantiques et leurs limites semi-classiques.

Programme

Géométrie des particules I (9 ECTS) – 1er Semestre :

5) Variétés, fibrations, tenseurs, formes différentielles. Groupes et algèbres de Lie
6) Fibrés principaux, connexions principales, fibrés associés, connexions linéaires
7) Métriques de Riemann et de Lorentz, spineurs
8) Équations d'Einstein, de Dirac, de Maxwell, de Yang-Mills-Higgs

Géométrie des particules II (9 ECTS) – 2nd Semestre :

4) Super-variétés, super-symétries
5) Représentations unitaires du groupe de Poincaré et super-Poincaré, interprétation des équations fondamentales,
6) Introduction à la quantification des champs

Connaissances requises

Un niveau de M1 de Maths est requis, si possible avec un cours de base de Géométrie différentielle.

Bibliographie

[1] C.H.Taubes, "Differential Geometry. Bundles, connections, metrics and curvatures", Oxford, 2012;
[2] S.Varadarajan, "Supersymmetry for mathematicians: an introduction", AMS, 2004;
[3] G.t'Hooft "Under the spell of the gauge principle", World Scientific, 1994;
[4] A.M.Polyakov "Gauge fields and strings" CRC Press, 1987.

HOMOLOGIE DE HEEGAARD-FLOER (9 ECTS)
Christian Blanchet
2nd semestre

Présentation

Le but du cours est de construire l'homologie de Heegaard-Floer des variétés de dimension 3 et des entrelacs, et de définir les invariants de dimension 4 associés. On établira les propriétés de chirurgie et on présentera quelques calculs et applications. On s'appuiera sur les textes fondateurs de Ozsvath-Szabo et Lipschitz, en mettant en évidence les structures sous-jacentes, notamment l'associativité généralisée (structure A-infini).

Programme

1. Topologie des espaces symétriques des surfaces.
2. Introduction à l'homologie d'intersection lagrangienne.
3. Définition de l'homologie de Heegaard-Floer, invariance.
4. Homologie de Heegaard-Floer des entrelacs, le modèle en grille.
5. Les théorèmes de chirurgie.
6. Invariants en dimension 4.
7. Exemples de calculs et d'applications.

Connaissances requises

- Topologie des variétés de petite dimension.
- Homologie de Morse.
- Notions de géométrie symplectique.

Bibliographie

[1] Audin, Damian, *Théorie de Morse et Homologie de Floer,* EDP Sciences, CNRS éditions.

[2] Ozsváth, Peter, Szabó, Zoltán Holomorphic disks and topological invariants for closed three-manifolds. *Ann. of Math. (2)* 159 (2004), no. 3, 1027–1158.

[3] Ozsváth, Peter, Szabó, Zoltán Holomorphic disks and three-manifold invariants: properties and applications. *Ann. of Math. (2)* 159 (2004), no. 3, 1159–1245.

[4] Lipschitz Robert, A cylindrical reformulation of Heegaard Floer homology". *Geom. Topol. 10* (2006), 955-1097.

TOPOLOGIE DES VARIETES DE PETITE DIMENSION (9 ECTS)
Michel Blanchet
2nd semestre

Présentation

Le but du cours est d'introduire à l'étude topologique des variétés de dimension 3 et 4 et de leurs invariants, notamment les invariants quantiques en dimension 3. La présentation sera faite dans le cadre différentiable et utilisera les outils de base de topologie différentielle : théorie de Morse et transversalité. On développera le calcul de chirurgie pour les variétés de dimension 3 et 4 et on l'appliquera à la construction d'invariants. Le formalisme des TQFTs (Topological Quantum Field Theories) sera abordé.

Programme

1. Topologie des espaces symétriques des surfaces.
2. Introduction à l'homologie d'intersection lagrangienne.
3. Définition de l'homologie de Heegaard-Floer, invariance.
4. Homologie de Heegaard-Floer des entrelacs, le modèle en grille.
5. Les théorèmes de chirurgie.
6. Exemples de calculs et d'applications.

Connaissances requises

- Topologie algébrique : homologie.
- Variétés, notions de base de topologie différentielle.

Bibliographie

[1] Rolfsen, *Knots and Links,* AMS Chelsea Publishing.

[2] Gompf, Stipsicz, *4-Manifolds and Kirby Calculus, AMS* Grad. Studies in Maths Vol 20.

[3] Turaev, Quantum Invariants of Knots and 3-manifolds, De Gruyter.

PROBLEMES VARIATIONNELS GEOMETRIQUES ET GEOMETRIE SEMI-ALGEBRIQUE REELLE (9 ECTS)

Thierry De Pauw

2nd semestre

Présentation

Le but de ce cours est de présenter des outils fondamentaux de la géométrie algébrique réelle, et leurs applications à l'analyse de problèmes variationnels de nature géométrique. On démontrera des résultats de base de géométrie algébrique réelle, par exemple la décomposition cellulaire, la triangulation semi-algébrique lipschitzienne, et l'inégalité de Lojasiewicz. Ensuite on appliquera l'inégalité de Lojasiewicz-Simon à l'étude du comportement asymptotique de certaines solutions d'équations aux dérivées partielles, et on présentera des résultats tout récents d'existence pour le problème de Problème de Plateau dans des classes d'homologies d'ensembles semi-algébriques réels.

Programme

I. Ensembles semi-algébriques

- Axiomes d'o-minimalité; ensembles semi-linéaires et applications PL
- Polynômes : continuité des racines ; polynômes symétriques ; discriminants - Décomposition cellulaire et théorème de Tarski-Seidenberg
- Triangulations lipschitziennes des ensembles semi-algébriques
- Discussion sur les semi-analytiques et sous-analytiques

II. Applications au calcul des variations

- Inégalité de Lojasiewicz
- Comportement asymptotique de solutions d'EDP (d'après L. Simon)
- Inégalité isopérimétrique généralisée
- Problème de Plateau dans les classes d'homologie d'ensembles semi-algébriques compacts

Connaissances requises

Le cours "Rectifiabilité et courants" (au 1er semestre)

Bibliographie

[1] J. Bochnak, M. Coste and M.-F. Roy, Real Algebraic Geometry

[2] L. van den Dries, Tame Topology and o-minimal Structures

[3] L. Simon, Theorems on Regularity and Singularity of Energy Minimizing Maps

INTRODUCTION AUX EDP STOCHASTIQUES ET A LA THEORIE DE TURBULENCE (9+9 ECTS)
Sergei Kuksin
2nd semestre

Présentation

Dans la science moderne, de plus en plus souvent on étudie des processus aléatoires qui sont décrits par des EDP non-linéaires (on trouve de tels processus, par exemple, en météorologie, en théorie de turbulence ou bien en économie mathématique). Le cours est une introduction élémentaire à la théorie mathématique de ces processus.

Programme

Je vais parler d'EDP stochastiques non-linéaires, en utilisant l'équation de Burgers stochastique comme un exemple. Je vais discuter brièvement l'existence et l'unicité d'une solution. Après, je parlerai des propriétés qualitatives de solutions. Notamment, je discuterai les limites "le temps converge vers l'infini" et "la viscosité converge vers zéro". Cette dernière limite correspond à la turbulence dans l'équation de Burgers, qui s'appelle "la burgulence". Je vais expliquer pourquoi ces limites sont importantes pour la théorie de la turbulence et de la météorologie.

Connaissances requises

Je présume les connaissances de base des EDP (les espaces de Sobolev, l'équation de chaleur, le principe du maximum,...) et celles des résultats basiques de probabilité (variables aléatoires, indépendance, propriétés élémentaires du processus de Wiener...). Je rappellerai "presque tous" les résultats que je vais utiliser dans le cours.

Bibliographie

Pour les EDP et les probabilités, on peut utiliser n'importe quel livre. Par exemple, pour les probabilités, le livre
[Shi] A.Shiryaev "Probability"

A propos de l'équation de Burgers déterministe, on peut voir l'article de mon ancien doctorant:
[Bir] A. Biryuk "Spectral properties of solutions of the Burgers equation with small dissipation", Funct. Anal. Appl. 35 (2001), 1-12.

La majorité des résultats du cours seront présentés dans l'article :
[KK] T.Kelai, S.Kuksin "L'introduction dans la théorie d'équation de Burgers stochastique et dans la théorie de la burgulence" qui sera disponible sur Internet en avril.

VARIETES HAMILTONIENNES ET QUANTIFICATION GEOMETRIQUE (9+9 ECTS)

Xiaonan Ma

2nd semestre

Présentation

La première partie de mon cours est une introduction sur la géométrie symplectique et l'action de groupe sur les variétés. Le concept central est l'application moment associée à une action d'un groupe sur une variété symplectique.
La deuxième partie de mon cours porte sur des applications variées reliées à l'application moment : localisation, quantification géométrique, théorie de représentation, Théorie géométrique des invariants etc.

Programme

- Variétés symplectiques, Variétés Hamiltoniennes, Définitions
- Théorème de Darboux
- les groupes de cohomologie d'un groupe de Lie et de son algèbre de Lie
- L'application moment et réduction symplectique
- Exemples de réduction symplectique : variétés torique et polytope de Delzant, l'espace de module de G-fibrés principaux plats sur une surface de Riemann compacte
- Convexité de l'application moment
- Application moment et orbites fermées pour l'action d'un groupe réductif complexe
- Cohomologie équivariante et classes caractéristiques
- La formule de localisation de Duistermaat-Heckman et Berline-Vergne
- Image de la mesure de Liouville par l'application moment et volumes des espaces réduits
- Prequantification, action et moment
  Exemple 1 : variétés toriques
  Exemple 2 : Théorème de Borel-Weil-Bott sur la réalisation géométrie de représentation irréductible d'un groupe de Lie compact connexe
- Quantification géométrique
- Théorie géométrique des invariants et la réduction symplectique
- Quantification commute à la réduction symplectique

Connaissances requises

Variétés différentielles. Bien que les bases de la théorie des groupes de Lie ne soient pas supposées connues, avoir suivi le cours de Harris et Hernandez « Théorie de Lie et représentations » aidera à mieux comprendre, en particulier pour la deuxième partie du cours.

Bibliographie

[1] X. Ma, Hamiltonian manifolds and geometric quantizations.Poly de mon cours.
[2] Cannas da Silva, Ana, Lectures on symplectic geometry. Lecture Notes in Mathematics, 1764. Springer-Verlag, Berlin, 2001. xii+217 pp.
[3] V. Guillemin, S. Sternberg, Symplectic techniques in physics. Second edition. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. xii+468 pp.
[4] M. Vergne, Quantification géométrique et réduction symplectique. Séminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001. Astérisque No. 282 (2002), 249-278.

ALGEBRES D'OPERATEURS ET APPLICATIONS (9 ECTS)

Andrzej Zuk et Georges Skandalis

1er semestre/2ème semestre

Présentation

Le but de la géométrie non commutative est d'utiliser des outils de la géométrie différentielle pour l'étude de certaines algèbres non commutatives, qui apparaissent naturellement à la fois en mathématique et en physique. Nous étudierons particulièrement l'espace non commutatif dual d'un groupe non abélien.
On commencera par les bases de la théorie des algèbres d'opérateurs. On présentera les notions et théorèmes de base dues à Von Neumann, Gelfand ainsi que d'autres mathématiciens.
On exposera les développements tout récents en relations avec le progrès remarquable en ce qui concerne la théorie de groupes.

Programme

1. Algèbres de Von Neumann - Skandalis (9 ECTS), 1er semestre

- Théorème du bicommutant de Von Neumann
- Théorème de densité Kaplansky
- Théorème de transitivité de Kadison
- Algèbres de Von Neumann de type I
- Classification en types et exemples
- Algèbres de Von Neumann de type II
- Exemples (groupes discrets, actions ergodiques)

2. C* algèbres - Zuk (9 ECTS), 1er semestre

- Construction GNS
- C*-algèbre d'un groupe discret
- L'algèbre des rotations irrationnelles et l'opérateur d'Harper
- Calcul fonctionnel
- Moyennabilité et nuclearité
- Simplicité, exactitude
- Conjecture de Baum-Connes

3. Applications et exemples issus de la théorie géométrique des groupes - Zuk (9ECTS), 2ème semestre

- La propriété (T)
- Graphes expanseurs
- Moyennabilité
- Marches aléatoires
- Groupes d'automates
- Croissance de groupes
- Groupes de torsion
- Invariants L2
- Conjecture de Dixmier

Connaissances requises

Une connaissance d'analyse fonctionnelle est utile

Bibliographie

[1] A. Connes : Noncommutative Geometry, disponible sur http://www.alainconnes.org/docs/book94bigpdf.pdf
[2] V.F.R. Jones : Von Neumann algebras, Notes de cours, disponible sur http://www.math.berkeley.edu/~vfr/VonNeumann.pdf

Des références bibliographiques ponctuelles seront en outre données pendant le cours.

Programme des Cours d'ouverture

Les catégories : une méthodologie pour les mathématiques (3 ECTS)

Alain Prouté

2ème semestre

Présentation

Ce cours expose les concepts fondamentaux de la théorie des catégories, en insistant sur leur utilisation dans différentes branches des mathématiques (en particulier en algèbre, en topologie algébrique, en géométrie et en logique, mais aussi en informatique). Les exemples y jouent donc un rôle important.

Les catégories apportent au moins deux avantages importants. D'abord, par leur grand degré de généralité, elles unifient des concepts qui peuvent paraître sans rapport entre eux, mettant ainsi leur structure en évidence de manière plus profonde que ce qu'on peut percevoir habituellement. Par ailleurs, elles offrent souvent des raccourcis surprenants, divisant la longueur des démonstrations par des facteurs très importants.

C'est leur caractère behavioriste, c'est-à-dire le fait qu'elles s'intéressent plus au ``comment cela se comporte'' qu'au ``comment c'est construit'', qui induit ces caractéristiques. On peut donc les voir comme une manière de penser, comme une méthodologie et même comme une philosophie.

Les principaux concepts avec lesquels on espère familiariser les étudiants sont ceux de foncteurs adjoints, de classifiant, de monade et de topos. Sur ces deux derniers sujets, certains théorèmes devront être admis faute de temps, mais l'objectif du cours n'est pas de faire un exposé exhaustifs mais bien d'inciter les étudiants à prendre l'habitude d'utiliser les méthodes catégoriques quelle que soit la discipline dans laquelle ils comptent travailler.

Bibliographie

La référence principale est le cours de logique catégorique de 2010 :

http://www.logique.jussieu.fr/~alp/cours_2010.pdf

dans lequel on trouvera une bibliographie, dont les références essentielles sont les numéros [1], [4], [17], [25], [27] et [28]. On trouvera d'autres informations sur la page:

http://www.logique.jussieu.fr/~alp