

Logiques et langages pour la complexité

Patrick BAILLOT & Arnaud DURAND

M2 LMFI 2015-2016

Les classes de complexité sont classiquement définies par des modèles de machines et des bornes sur l'utilisation des ressources (le temps et l'espace, par exemple). Cependant pour mieux les comprendre il est tentant de chercher à les caractériser de manière plus déclarative, sans référence aux machines ni aux bornes. La logique se révèle être un outil fondamental pour cela.

Diverses approches ont été proposées dans ce but, reposant soit sur l'idée de décrire ce que l'on peut calculer, soit sur celle de décrire comment on peut calculer. La première voie est celle de la *complexité descriptive*, qui s'appuie sur la théorie des modèles finis. La seconde est celle de la *complexité implicite*, qui se nourrit de la théorie de la démonstration.

Ces caractérisations permettent en retour de définir d'une part des langages de requêtes pour les bases de données avec des bornes de complexité pour l'évaluation des requêtes, d'autre part des langages de programmation avec des bornes de complexité sur le temps d'exécution. Ce cours propose une introduction croisée aux domaines de la complexité descriptive et de la complexité implicite, en cherchant à dégager leurs principaux concepts, de leurs fondements logiques à leurs déclinaisons dans plusieurs langages.

Programme

- Caractérisations logiques des classes de complexité : logique existentielle du second-ordre (ESO) et NP (Fagin), fragments de ESO, la logique du premier ordre (FO) et classes de circuits, définissabilité et jeux d'Ehrenfeucht-Fraïssé, bornes inférieures, caractériser le temps polynomial sur les structures non ordonnées.
- Caractérisations par contrôle de l'induction ou de la récursion : logique du second-ordre et prouvabilité pour FP, récursion ramifiée pour FP et PSPACE.
- Caractérisations par contrôle de l'espace de calcul : systèmes de réécriture du 1er ordre, programmes fonctionnels cons-free pour P, méthodes d'interprétations.
- Caractérisations par points-fixes : logiques à points fixes pour P et PSPACE, Datalog, extension de Datalog avec négation, programmes "while".
- Caractérisations par contrôle de la duplication : logique linéaire, logique linéaire élémentaire, pour P, EXPTIME et temps élémentaire.

Bibliographie

- 1 Stephen Bellantoni, Stephen A. Cook : A New Recursion-Theoretic Characterization of the Polytime Functions. *Computational Complexity* 2 : 97-110 (1992)
- 2 Kees Doets, *Basic Model Theory*, CSLI Publications Center for the Study of Language and Information, Stanford, California
- 3 Jean-Yves Girard : Light Linear Logic. *Inf. Comput.* 143(2) : 175-204 (1998)
- 4 Neil Immerman, *Descriptive Complexity*, Springer, 1999
- 5 Neil D. Jones : *Computability and complexity - from a programming perspective*. *Foundations of computing series*, MIT Press 1997, ISBN 978-0-262-10064-9, pp. I-XVI, 1-466

- 6 Daniel Leivant, Jean-Yves Marion : Ramified Recurrence and Computational Complexity II : Substitution and Poly-Space. CSL 1994 : 486-500
- 7 Leonid Libkin, Elements of finite model theory, Springer, 2004