

# Contenu calculatoire des preuves de la logique classique

Hugo HERBELIN

M2 LMFI 2015-2016

La correspondance dite de Curry-Howard souligne que les preuves ont la même structure qu'un programme, fournissant une incarnation calculatoire au théorème d'élimination des coupures de Gentzen. Longtemps cantonnée au cas de la logique intuitionniste, dans la foulée du slogan de Brouwer qu'une preuve devrait être vue comme un processus de construction, cette correspondance a été étendue au cas de la logique classique au début des années 90. Ce cours posera les bases techniques des recherches actuelles visant à étendre la correspondance preuve-programme encore quelques crans plus loin. On abordera tout autant le style direct (une preuve calcule) que l'approche par réalisabilité (une preuve se découple en un programme et une preuve de correction de ce programme).

## Programme

- La correspondance preuve-programme pour la logique classique
  - Opérateurs de contrôle (call-cc, abort, C, ...) et axiomes classiques (loi de Peirce, tiers-exclu, ...)
  - Lambda-calculs pour la logique classique : lambda-mu-calcul et déduction naturelle classique, système mu-mu-tilde et LKtq
  - Sémantiques opérationnelles de la logique classique : appel par nom et LKT, appel par valeur et LKQ
  - L'interprétation de la logique classique en logique intuitionniste et ses limites : polarisation, traductions par double négation et par passage de continuation, quantification existentielle forte
  - Modèles catégoriques de la logique classique calculatoire
- Réalisabilité intuitionniste et classique
  - Réalisabilité de Kleene
  - Réalisabilité modifiée de Kreisel
  - Interprétation fonctionnelle de Gödel
  - Internalisation de la réalisabilité (indépendance des prémisses, principe de Markov, axiome du choix intensionnel)
  - Réalisabilité classique de Krivine
  - Modèles catégoriques de la réalisabilité
- Extensions de l'interprétation calculatoire de la logique classique
  - Délimiteurs de contrôle et A-traduction de Friedman
  - Affectation mémoire et forcing
  - Application au contenu calculatoire des théorèmes de complétude des calculs des prédicats intuitionniste et classique

## Bibliographie

- 1 J.Y. GIRARD, Y. LAFONT & P. TAYLOR : Proofs and Types (Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 7, Cambridge University Press, 1989).
- 2 J.Y. GIRARD : Le Point Aveugle (Cours de Logique, Tomes 1 & 2, Collection Visions des Sciences, Hermann, 2006-2007).

- 3 U. KOHLENBACH : Applied Proof Theory : Proof Interpretations and their Use in Mathematics (Springer Monographs in Mathematics, 2008).
- 4 J.-L. KRIVINE : Lambda-calcul, types et modèles (Masson, 1990).
- 5 M. SØRENSEN, P. URZYCZYN : Lectures on the Curry-Howard Isomorphism (Volume 149, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 2006).