

Théories des modèles des corps valués

Martin HILS

M2 LMFI 2015-2016

Les travaux de Robinson sur les corps valués algébriquement clos (ACVF) et surtout, dans les années 60, les résultats fameux d’Ax-Kochen et Ershov montrent que la théorie des modèles fournit des outils bien adaptés à l’étude des corps valués, en particulier des corps valués henséliens (de caractéristique résiduelle 0) : certaines classes de problèmes sur le corps valué se réduisent à des problèmes qui ne portent que sur le groupe des valeurs ainsi que sur le corps résiduel.

Ces développements concernent plutôt des aspects ‘arithmétiques’. Depuis une dizaine d’années, un point de plus ‘géométrique’ prévaut en théorie des modèles des corps valués. Les travaux de Haskell, Hrushovski et Macpherson [3] sont à l’origine de cette évolution : classification des imaginaires ; utilisation de concepts plus poussés de théorie des modèles pure (stabilité, NIP).

Dans le cours, nous proposons de traiter ces deux aspects de la théorie des modèles des corps valués. La théorie des corps valués étant un sujet assez vaste, nous sommes contraints d’accepter certains résultats fondamentaux d’algèbre sans preuve, afin de pouvoir mettre l’accent sur les liens entre la théorie des modèles et les résultats provenant de l’algèbre.

Programme

- Préliminaires : Quelques résultats fondamentaux d’algèbre sur les corps valués Théorème de Chevalley et Théorème de conjugaison pour les extensions des valuations Construction et propriétés de la hensélisée Théorie de Kaplansky : suites pseudo-convergentes et corps valués maximale-ment complets Coarsening de valuations
- Élimination des quantificateurs dans ACVF (Théorème de Robinson)
- Théorie des modèles des corps valués henséliens de caractéristique résiduelle 0 Théorème de Pas : Élimination des quantificateurs du corps dans le langage de Denef-Pas Principe d’Ax-Kochen-Ershov Application du principe d’AKE : Solution approximative de la conjecture d’Artin
- Théories des modèles des nombres p-adiques Décidabilité des nombres p-adiques Élimination des quantificateurs dans le langage de Macintyre
- Théorie des modèles géométrique de ACVF Classification des imaginaires de ACVF dans les sortes géométriques de Haskell-Hrushovski-Macpherson (en suivant la preuve dans [4]) Description de la partie stable et de la partie Gamma-interne dans ACVF

Bibliographie

- 1 Zoé Chatzidakis, “Théorie des modèles des corps valués”, notes de cours (2008). (Disponible à <http://www.logique.jussieu.fr/zoe/M208/cours08.pdf>.)
- 2 Antonio J. Engler et Alexander Prestel, “Valued fields”, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin 2005.
- 3 Deirdre Haskell, Ehud Hrushovski et Dugald Macpherson, “Definable sets in algebraically closed valued fields : elimination of imaginaries”, J. Reine Angew. Math. 597, 175-236 (2006).

- 4 Will Johnson, "On the proof of elimination of imaginaries in algebraically closed valued fields", prépublication, arXiv :1406.3654 [math.LO] (2014).
- 5 Lou van den Dries, "Lectures on the model theory of valued fields", in : 'Model Theory in Algebra, Analysis and Arithmetic : Cetraro, Italy 2012', Editors : H. Dugald Macpherson, Carlo Toffalori (Lecture Notes in Mathematics / C.I.M.E. Foundation Subseries), Springer-Verlag, Berlin 2014