Forcing pour les mathématiciens

Boban VELICKOVIC

M2 LMFI 2015-2016

La méthode de 'forcing' a été introduite par Paul Cohen en 1963 afin de démontrer l'indépendance de l'Hypothèse du Continu (HC) et l'Axiome du Choix (AC) des axiomes standards ZFC de la théorie des ensembles.

Par la suite, cette méthode a été utilisée pour démontrer de nombreux résultats d'indépendance en théorie des ensembles et d'autres domaines de mathématiques, mais aussi comme outil pour démontrer des théorèmes directement dans ZFC.

Elle est actuellement au cœur du programme de Gödel dont le but est la recherche des nouveaux axiomes pour les mathématiques.

Le but de ce cours est l'introduction au forcing et ses applications en différents domaines de mathématiques : topologie, algèbre commutative, théorie des C*-algèbres, etc.

Programme

— Rappel sur les bases de la théorie des ensembles : cardinaux, ordinaux, ordres, algèbres de Boole, etc.
— Modèles de ZFC, réflexion, relativisation, l'univers constructible
— Notions de forcing et extensions génériques, théorème fondamental de forcing
— Applications I : l'Hypothèse du Continu et l'Axiome de Choix
— Applications II : le principe 'diamant', arbres de Souslin, automorphismes de $\beta N \setminus N$, problème de Whitehead, problème de Naimark
— Forcing itéré : l'axiome de Martin et ses applications, l'axiome de forcing propre (PFA)

Bibliographie

1 T. Jech, Set Theory (Springer Verlag 2002)

2 J.-L. Krivine Theorie des ensembles (Cassini, 1998)

3 K. Kunen, Set theory, an introduction to independence results (North Holland, 1983)

4 N. Weaver, Forcing for mathematicians, (World Scientific, 2014)