2016
2017

Master 2 LOGIQUE MATHEMATIQUE ET FONDEMENTS DE L'INFORMATIQUE

Domaine : Sciences, Technologies, Santé
Mention : Mathématiques et Applications

Responsables pédagogiques :

Alexis Saurin & Boban Velickovic

http://www.math.univ-paris-diderot.fr/m2lmfi/

SOMMAIRE

Le M2 LMFI est le seul M2 français dédié à la logique mathématique et à ses applications à l'informatique. Il forme des logiciens de haut niveau et les prépare au doctorat, aux carrières universitaires, à l'enseignement et à des métiers de la R&D.

Cette formation, qui est l'une des spécialités du Master mention Mathématiques et Applications de l'Université Paris Diderot - Paris 7, est le fruit d'une longue tradition logique à Paris 7, notamment à travers le DEA de Logique de l'Université Paris 7.

Le M2 LMFI s'appuie sur deux laboratoires d'accueil prestigieux, de l'Université Paris-Diderot et du CNRS, couvrant la plupart des branches de la logique mathématique et informatique :

- Équipe de logique mathématique de l'Institut de Mathématiques de Jussieu (IMJ)

  UMR 7586 du CNRS – http://www.logique.jussieu.fr

- Équipe Preuves, Programmes, Systèmes (PPS) de l'Institut de Recherche en Informatique Fondamentale (IRIF)

  UMR 8243 du CNRS – http://www.pps.univ-paris-diderot.fr

CONTACTS	
Responsables pédagogiques du M2 :	
Alexis Saurin	**Boban Velickovic**
saurin@pps.univ-paris-diderot.fr	boban@math.univ-paris-diderot.fr
Localisation : Site PRG (13ème) Bâtiment Sophie Germain 8 place Aurélie Nemours	
3ème étage, bureau 3040 – 01 57 27 93 37	6ème étage, bureau 6020 - 01 57 27 91 03
Le secrétariat du M2 : Catherine PRUDLO	
catherine.prudlo@univ-paris-diderot.fr	
5ème étage, bureau 5055 - 01 57 27 93 06	
Adresse postale : Université Paris Diderot – Paris 7 UFR de Mathématiques Bâtiment Sophie Germain – Case 7012 75205 Paris cedex 13	
Site internet du M2 : **http://www.math.univ-paris-diderot.fr/m2lmfi**	

CONDITIONS D'ADMISSION

Le candidat devra avoir validé une 1ère année de Master (M1), une Maîtrise ou un titre équivalent. Cette première année devra avoir été effectuée dans une spécialité mathématique, informatique, ou logique (dans ce dernier cas, par exemple, dans le cadre d'un master de philosophie).

- **Candidature des étudiants étrangers (hors EEE et Suisse) :**
  Afin de faciliter la mobilité internationale, l'Université Paris Diderot adhère à l'Agence Campus France.
  Nous invitons les étudiants des pays concernés (http://www.campusfrance.org/fr/node/1246) à se renseigner sur le site de Campus France (http://www.campusfrance.org/fr) et à s'inscrire auprès de cet organisme avant mars 2016.

- **Pour toutes les autres candidatures :** Les étudiants doivent déposer une demande de pré-inscription sur le site web : https://ecandidat.app.univ-paris-diderot.fr puis transmettre par voie postale le dossier de préinscription avec les pièces justificatives.

  Période de préinscription sur e-candidat :
  Du 20 mai 2016 au 30 juin 2016.
  Du 25 août 2016 au 5 septembre 2016.
  Les dossiers de candidature envoyés avant le 4 juillet 2016 bénéficieront d'une réponse mi-juillet, les autres en septembre.

  Date limite de remise du dossier d'admission : 5 septembre 2016.

  Date limite d'inscription administrative : 30 octobre 2016.

Pour toute demande de renseignement complémentaire, vous pouvez consulter le site :

http://www.math.univ-paris-diderot.fr/m2lmfi/

ou vous adresser aux Responsables de la formation ou au secrétariat du master 2 (voir la rubrique contact).

ORGANISATION DU M2 LMFI

Offre d'enseignement du diplôme :

Le Master 2ème année LMFI propose

au premier semestre :

- **un cours préliminaire intensif de logique** (30h), facultatif
- **un tronc commun constitué de quatre cours fondamentaux** (3 cours à 24h et 1 cours à 48h)
- **les groupes de travail** des cours fondamentaux (18h chacun)

au second semestre :

- **des cours d'orientation** (48h chacun),
- **des cours d'ouverture** (24h chacun),
- **une initiation à la recherche sous forme d'un stage**

La liste et le programme des différents cours se trouvent en page 10 et suivantes.

Stage d'initiation à la recherche

Le stage de M2 du LMFI peut s'effectuer :

- soit dans un laboratoire universitaire, par exemple dans une des deux équipes d'accueil : l'équipe de Logique Mathématique ou le laboratoire Preuves, Programmes, Systèmes,
- soit dans un autre laboratoire de recherche, en France ou à l'étranger, après accord du responsable du M2.

Dans tous les cas, il est placé sous la responsabilité d'un enseignant du Master, enseignant référent du stage. Le travail de recherche, d'une durée d'au moins 3 mois, donne lieu à la rédaction d'un mémoire et à une soutenance devant un jury de stage.

Calendrier 2016–2017

- **1 au 12 septembre 2016 :** cours préliminaire intensif de logique
- **13 septembre au 2 décembre 2016 :** cours fondamentaux
- **début décembre :** réunion de présentation des cours du second semestre
- **5 au 9 décembre 2016 :** rattrapage de cours et révisions
- **12 au 16 décembre 2016 :** semaine d'examens du 1er semestre
- **17 décembre 2016 au 2 janvier 2017 :** vacances de fin d'année
- **3 janvier au 24 mars 2017 :** cours du second semestre
- **27 mars au 31 mars 2017 :** rattrapage de cours et révisions
- **18 au 21 avril 2017 :** semaine d'examens du 2nd semestre
- **printemps et été 2017 :** stage d'initiation à la recherche

VALIDATION DU M2 LMFI

La validation de la 2ème année de Master correspond à l'acquisition de 60 crédits ECTS selon les modalités suivantes :

- Validation des quatre cours fondamentaux (20 ECTS).
- Validation de deux cours d'orientation (8 ECTS chacun).
- Validation de 8 ECTS d'ouverture, qui peuvent être obtenues, au choix :
  - par la validation de deux cours d'ouverture (24h et 4 ECTS chacun)
  - par la validation d'un troisième cours d'orientation (8 ECTS)
- Le stage est crédité de 16 ECTS.

Les cours d'orientation sont à choisir dans la liste proposée par le M2 (voir les cours spécialisés décrits dans la présente brochure) ou, après accord des responsables, parmi des unités d'un autre M2, par exemple dans le M2 Mathématiques Fondamentales ou dans le MPRI (Master Parisien de Recherche en Informatique).

L'attribution des ECTS correspondant à chacun des modules précédents est conditionnée par l'obtention, pour ce module, d'une note supérieure ou égale à 10. Cependant une compensation est possible entre les quatre notes F_1 , F_2, F_3 , F_4 des cours fondamentaux, sous réserve qu'elles soient toutes les quatre supérieures ou égales à 7 et que leur moyenne soit supérieure ou égale à 10.

Il est attribué une note finale du M2, qui est la moyenne entre $[(F_1xC1+F_2xC2+F_3xC3+F_4xC4)/(C1+C2+C3+C4)]$, O_1, O_2 et S, où F_1, F_2, F_3, F_4 sont les notes obtenues en cours fondamentaux, C_1, C_2, C_3, C_4 sont les coefficients, O_1 et O_2 sont les notes obtenues aux cours d'orientation et S la note de stage.

Les notes obtenues aux modules des cours d'ouverture n'interviennent donc pas dans la note finale, mais conditionnent l'obtention des crédits correspondants.

Le cours préliminaire de logique est facultatif mais fortement recommandé pour la validation du 1er semestre car il expose les pré-requis de logique.

Jury du Master

Le jury du M2 de Logique Mathématique et Fondements de l'Informatique est nommé en début d'année universitaire. Pour information, le jury était constitué comme suit pour l'année universitaire 2015-2016 :

HILS Martin,	Maître de Conférences à l'Université Paris Diderot - Paris 7
SAURIN Alexis,	Chargé de recherche CNRS, Président
DURAND Arnaud,	Professeur à l'Université Paris Diderot - Paris 7,
EHRHARD Thomas,	Directeur de Recherche CNRS
MEREL Loïc,	Professeur à l'Université Paris Diderot - Paris 7
ROZIÈRE Paul,	Maître de Conférences à l'Université Paris Diderot - Paris 7,
VELICKOVIC Boban,	Professeur à l'Université Paris Diderot - Paris 7

INFORMATIONS PRATIQUES

Bourses et/ou logement en résidence universitaire

Le ministère chargé de l'Enseignement supérieur accorde aux étudiants, un certain nombre d'aides gérées par le CROUS, en lien avec les universités : bourses sur critères sociaux, aide d'urgence annuelle, bourses de mobilité, passeport mobilité, prêts d'honneur, bourses de mérite…

Des informations sont disponibles sur la page du « Bureau de la vie étudiante » :

http://www.univ-paris-diderot.fr/sc/site.php?bc=vie_etudiante&np=Aides

Pour de plus amples informations, vous devez prendre contact avec le CNOUS : http://www.cnous.fr

Restauration

Le campus de Paris Diderot dispose d'un restaurant universitaire.

Ressources pour les étudiants

Les étudiants du M2 ont accès à la bibliothèque de Mathématiques-Recherche (Bâtiment Sophie Germain, 8ème étage) ainsi qu'à quelques ouvrages mis à la disposition des étudiants par le M2.

Par ailleurs, l'Université Paris Diderot dispose de salles informatiques et de salles de travail en accès libre pour les étudiants.

Les laboratoires d'accueil du M2 sont situés dans le bâtiment Sophie Germain et les étudiants du M2 sont encouragés à assister aux séminaires de recherche de ces laboratoires, au moins à partir du début du second semestre.

APRÈS LE M2 LMFI…

Débouchés

La suite naturelle de cette formation est la préparation d’un doctorat, soit en logique mathématique, soit en informatique. Pour un doctorat en informatique, la thèse peut éventuellement être préparée dans une entreprise ou un organisme public de recherche (INRIA, CEA…).

Les débouchés sont des postes d’enseignant-chercheur ou de chercheur :

- soit dans le milieu universitaire (français ou étranger) ou des organismes publics de recherche (CNRS, INRIA, CEA, ONERA, etc.).
- soit dans les services de recherche et développement d’entreprises du monde industriel (EDF, France Telecom, Siemens, EADS, etc.).

Les services de recherche et développement de ces entreprises sont particulièrement demandeurs d’étudiants ayant une forte compétence à la fois mathématique, logique et informatique, leur permettant d’encadrer des ingénieurs travaillant dans les domaines de la certification de logiciels, de la vérification de programmes et de protocoles, ainsi que de la sécurité informatique. Dans certains cas, le recrutement peut s’effectuer directement à l’issue du master 2ème année.

Le Doctorat

La durée conseillée des études doctorales est de trois ans. Une année supplémentaire peut être accordée après examen du dossier (comprenant un rapport du directeur de thèse prouvant l’avancement des travaux) et autorisation du directeur de thèse, du directeur de l’École Doctorale, et du Président de l’Université. Le doctorat débute normalement en 6ème année des études universitaires et s’adresse aux étudiants titulaires d’un Master ou d’un diplôme de niveau équivalent.

Contrat doctoral

Il s’agit d’un contrat d’une durée de 3 ans.
L’École Doctorale Sciences Mathématiques de Paris-Centre dispose d’un petit nombre de ces contrats pour les étudiants titulaires du Master et désireux de préparer une thèse de doctorat.
Rémunération (depuis le 1er juillet 2010) :

- **1684,93 euros bruts** si le doctorant contractuel effectue uniquement de la recherche.
- **2024,70 euros bruts** s’il effectue des activités complémentaires, par exemple de l'enseignement.

D’autres types de financements sont possibles : projets ANR, bourses INRIA, allocations de la région Île-de-France, allocations doctorales PGSM, …

Conditions d’obtention du contrat doctoral. L’étudiant qui désire obtenir un contrat doctoral en vue de préparer une thèse doit faire acte de candidature auprès des responsables du M2 au cours de l’année universitaire.
Le jury du M2 établit un classement des dossiers (sur critères scientifiques). L’examen des dossiers a lieu pendant la deuxième quinzaine du mois de juin.
Les étudiants de nationalité étrangère, hors Union Européenne, sont invités à se renseigner sur les conditions exigées dans leur cas.

LISTE DES ENSEIGNEMENTS 2016-2017

1er SEMESTRE

Cours préliminaire intensif de logique *(M. H. Mourgues)*

Cours fondamentaux

- Théorie des modèles *(Patrick Simonetta)*
- Théorie de la démonstration *(Alexis Saurin)*
- Théorie des ensembles *(Todor Tsankov)*
- Calculabilité, complexité *(Sedki Boughattas et Paul Rozière)*

Groupes de travail sur les cours fondamentaux

2ème SEMESTRE

Cours d'orientation

- **Théorie des modèles :**
  Outils classiques (Elisabeth Bouscaren)
  Modèles, groupes, modules (Adrien Deloro)
- **Théorie des ensembles :**
  Forcing pour les mathématiciens (Boban Velickovic)
  Théorie descriptive des ensembles (François Le Maître)
- **Preuves et programmes :**
  Outils classiques (Michèle Pagani & Damiano Mazza)
  Contenu calculatoire des preuves de la logique classique (Hugo Herbelin)
- **Calculabilité et complexité :**
  Automates sur mots finis et infinis (Didier Caucal & Olivier Finkel)
  Logiques et langages pour la complexité (Patrick Baillot, Arnaud Durand)

Cours d'ouverture

- Modèles de la programmation (fonctionnelle, impérative, objet) (Pierre Letouzey)
- Initiation à la preuve formelle assistée par ordinateur (Pierre Letouzey)
- O-minimalité (Tamara Servi)

COURS PRÉLIMINAIRE INTENSIF DE LOGIQUE

(Du 1 au 12 septembre 2016)

Marie Hélène MOURGUES

PROGRAMME

Calcul des propositions : tables de vérité, tautologies, formes normales, compacité.

Calcul des prédicats : langages du premier ordre, termes, formules, modèles ; satisfaction d'une formule dans un modèle ; sous-structures ; isomorphismes ; équivalence élémentaire.

Théorie des ensembles : axiomes de Zermelo-Frænkel ; cardinaux ; théorèmes de Cantor et de Cantor-Bernstein ; ensembles finis, ensembles dénombrables.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. CORI & D. LASCAR : *Logique mathématique : cours et exercices* (nouvelle édition, Dunod, 2 tomes, 2003, chapitres 1, 3, 7).

[2] P. HALMOS : *Introduction à la théorie des ensembles* (Gauthiers-Villars, 1967 ; reimpression : Jacques Gabay, 1997). Version originale : *Naïve Set Theory*, (Van Nostrand, 1960, dernière édition : Springer, 1998)

COURS FONDAMENTAL DE LOGIQUE MATHÉMATIQUE I :

THÉORIE DES MODÈLES

Patrick Simonetta

PROGRAMME

- Ultraproduits, compacité.
- Extensions élémentaires, Théorèmes de Lowenheim-Skolem.
- Méthode des diagrammes, théorèmes de préservation.
- Va et vients, élimination des quantificateurs.
- Espace des types, théorème d'omission des types, modèles kappa-saturés, modèles atomiques.
- Théories oméga-catégoriques, théorème de Ryll-Nardzewski.
- Décidabilité de quelques théories axiomatiques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C.C. CHANG & H.J. KEISLER, Model Theory, North-Holland, 1990.

[2] R. CORI & D. LASCAR, Logique mathématique : cours et exercices, Dunod, 2 tomes, 2003.

[3] W. HODGES, Model Theory, Cambridge University Press, 1993.

[4] D. MARKER, Model theory, An introduction, Graduate Texts in Mathematics, 217, Springer- Verlag, New York, 2002.

[5] B. POIZAT, Cours de Théorie des Modèles, Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, 1985. [Version anglaise éditée chez Springer en 2000.]

[6] K. TENT & M. ZIEGLER, A Course in Model Theory. Lecture Notes in Logic, Cambridge University.

COURS FONDAMENTAL DE LOGIQUE MATHÉMATIQUE II :
THÉORIE DE LA DÉMONSTRATION

Alexis Saurin

PRÉSENTATION

La théorie de la démonstration traite de la formalisation et de l'analyse du raisonnement logique et mathématique. On peut dater la naissance de cette branche de la logique mathématique au tournant du XIXème et du XXème avec le programme de Hilbert présenté au deuxième congrès international des mathématiciens à Paris en 1900. Le deuxième problème de Hilbert visait ainsi à démontrer la cohérence de l'arithmétique.

Alors que le programme de Hilbet a contribué à l'essor de la théorie de la démonstration, l'échec de ce programme, signifié par les théorèmes d'incomplétude de Gödel, n'a pas pour autant causé la fin de la théorie de la démonstration. Au contraire, la théorie de la démonstration connu un grand renouveau par la suite avec au moins deux évolutions majeures à partir des années 30.

La première a eu lieu dans les années 30, immédiatement après les résultats d'incomplétude, avec l'introduction et l'étude de la déduction naturelle et du calcul des séquents par Gentzen et du lambda-calcul par Church. Church montrait alors l'indécidabilité du calcul des prédicats via le lambda-calcul tout en introduisant un modèle de calcul universel tandis que Gentzen déduisait la consistance de divers systèmes logiques, dont l'arithmétique, comme corollaire de l'élimination des coupures en calcul des séquents.

La seconde étape a eu lieu dans les années 60 avec la mise en évidence progressive, par le biais de la correspondance de Curry-Howard, des liens profonds entre preuves et programmes. La logique linéaire et la théorie des types dépendants ont profondément renouvelé les liens entre théorie de la démonstration et théorie de la programmation, conduisant à ce qu'on peut aujourd'hui appeler la «logique de programmation».

Le cours fondamental traitera principalement de la première étape de cette évolution jusqu'à l'introduction de la correspondance de Curry-Howard et l'étude des lambda-calcul pur et simplement typé.

PROGRAMME

1) Théorème de complétude de Gödel.
2) Déduction naturelle du premier ordre : Système NJ. Logique intuitionniste et son interprétation BHK. Élimination des coupures de NJ. Propriétés de la sous-formule et du témoin existentiel dans NJ. Arithmétique intuitionniste HA.
3) Calcul des séquents du premier ordre : Calculs LJ et LK. Relation entre prouvabilités intuitionniste et classique. Élimination des coupures et ses conséquences. Théorème de Herbrand.
4) Lambda-calcul non typé. Étude de quelques grands résultats du lambda-calcul pur (confluence, standardisation, séparation). Théorèmes de point fixe. Représentation des fonctions récursives.
5) Lambda-calcul simplement typé : Modèles ensemblistes du lambda-calcul simplement typé. Système T. Correspondance de Curry-Howard. Normalisation forte du lambda-calcul simplement typé.

TD

Ces séances seront en partie animées par les étudiants eux-mêmes.
L'objectif des séances est double : Il s'agit d'une part de permettre aux participants, par la résolution d'exercices et problèmes, de s'assurer d'une bonne compréhension du cours. D'autre part, les étudiants auront l'occasion de s'astreindre à rédiger soigneusement et s'exerceront à faire des exposés oraux devant leurs collègues.
Les TD permettront également des traiter quelques démonstrations omises du cours.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. CORI, D. LASCAR. Logique mathématique, tome 1&2. (Dunod, 2003).

[2] R. DAVID, K. NOUR, C. RAFFALLI : Introduction à la logique -- Théorie de la démonstration (Dunod, 2004).

[3] J.-Y. GIRARD : Proof Theory and Logical Complexity (Bibliopolis, 1985).

[4] J.-Y. GIRARD, Y. LAFONT & P. TAYLOR : Proofs and Types (Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 7, Cambridge University Press, 1989, disponible sur la page de P. Taylor).

[5] J Goubault-Larrecq & I. Mackie : Proof theory and automated deduction (Kluwer, 1997).

[6] J.-L. KRIVINE : Lambda-calcul : Types et Modèles (Masson, 1990, ou E. Horwood : Lambda-calculus : types and models -- version augmentée, en anglais, 1992, disponible sur la page de J-L Krivine).

COURS FONDAMENTAL DE LOGIQUE MATHÉMATIQUE III :
THÉORIE DES ENSEMBLES

Todor Tsankov

PROGRAMME

- ordinaux, récurrence transfinie ;
- axiome du choix et énoncés équivalents ;
- arithmétique des cardinaux infinis ; cofinalité, cardinaux réguliers et singuliers, théorème de König ;
- la hiérarchie de von Neumann, théorèmes de réflexion ;
- filtres et ultrafiltres, ensembles stationnaires dans ω_1, lemme de Fodor ;
- relations bien fondées et collapse de Mostowski ;
- quelques éléments de la théorie descriptive.

BIBLIOGRAPHIE

[7] Cori, R. et Lascar, D., **Logique mathématique : cours et exercices**, Dunod, 2003.

[8] Hrbacek, K. et Jech, T., **Introduction to set theory**, Third edition, Marcel Dekker, 1999.

[9] Krivine, J.L., **Théorie des ensembles**, Cassini, 1998.

COURS FONDAMENTAL DE LOGIQUE MATHÉMATIQUE III :
CALCULABILITÉ, COMPLEXITÉ

Sedki Boughattas & Paul Rozière

PROGRAMME

Calculabilité : fonctions récursives et fonctions calculables par machine ; caractérisation logique des fonctions calculables ; théorème smn et théorèmes de point fixe ; notions de réduction et problèmes indécidables.

Introduction à la complexité : classes,réductions,complétude.

Arithmétique formelle : axiomes de Peano et sous-systèmes faibles ; arithmétisation de la logique ; théorèmes d'indécidabilité ; les théorèmes d'incomplétude de Gödel.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.BARWISE (ed): Handbook of Mathematical Logic (North-Holland,1977-1999).

[2] R.CORI &D.LASCAR : Logique mathématique : cours et exercices (Dunod,2 tomes,2003).

[3] R.LASSAIGNE &M. de ROUGEMONT : Logique et Complexité (Hermès,1996).

[4] M. MACHTEY & P. YOUNG : An introduction to the General Theory of Algorithms (North Holland, 1978).

[5] J.R. SCHOENFIELD : Mathematical Logic (Addison-Wesley, 1967. Assoc. for Symb. Logic, 2001).

[6] R.SMULLYAN : Les Théorèmes d'Incomplétude de Gödel (Masson,1993).

[7] O. GOLDREICH : Computational Complexity : A Conceptual Perspective (Cambridge University Press, 2008).

[8] N.D. JONES: Computability and Complexity : From a Programming Perspective (MIT Press, 1997).

GROUPE DE TRAVAIL SUR LES COURS FONDAMENTAUX

Ces séances seront animées essentiellement par les étudiants eux-mêmes. L'objectif est double. Il s'agit d'une part de permettre aux participants, par la résolution d'exercices et problèmes, de s'assurer d'une bonne compréhension du cours. D'autre part, les étudiants auront l'occasion de s'astreindre à rédiger soigneusement et s'exerceront à faire des exposés oraux devant leurs collègues.

THÉORIE DES MODÈLES : OUTILS CLASSIQUES

Elisabeth Bouscaren

Nous supposerons connues les notions de théorie des modèles et de théorie des ensembles basique (ordinaux, cardinaux) des cours du premier semestre.

PROGRAMME

Nous commencerons par quelques rappels, en fonction de ce qui aura été fait dans le cours de théorie des modèles.

(1) Rappels : Théorème d'omission des types, modèles k-saturés, Modèles premiers.
(2) Suites d'indiscernables, Modèles d'Ehrenfeucht-Mostowki.
(3) Rang de Morley.
(4) Paires de Vaught, Ensembles fortement minimaux.
(5) Théorème de catégoricité de Morley.
(6) Imaginaires, élimination des imaginaires, exemples.
(7) Types définissables.
(8) Etude d'exemples dont : les corps algébriquement clos, les ordres, le graphe aléatoire.

Ensuite en fonction du public nous choisirons parmi les différents sujets possibles suivants :

- Constructions de Fraïssé.
- La déviation et l'indépendance, Classification des théories : théories stables, théories simples, théories sans la propriété d'indépendance.
- Prégéométries dans les ensembles fortement minimaux.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B Buechler S., Essential Stability Theory, Springer, 1996.

[2] Hodges, W., Model theory, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 42, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[3] Marker, D., Model theory, An introduction, Graduate Texts in Mathematics, 217, Springer-Verlag, New York, 2002.

[4] Pillay A., An introduction to stability theory, Clarendon Press, Oxford, 1983. [Autre édition : édition Dover].

[5] Poizat B., Cours de théorie des modèles, 1985, Nur Al-Mantiq Wal-Ma'rifah. [Version anglaise éditée chez Springer en 2000].

[6] Simon, P., A guide to NIP theories, Lecture Notes in Logic, Cambridge University Press, 2015.

[7] Tent K., Ziegler M., A course in Model Theory, Lecture Notes in Logic, Cambridge University Press, 2012.

MODÈLES, GROUPE, MODULES

Adrien Deloro

Le cours, en deux volets, abordera la théorie des modèles des groupes linéaires. L'étude au premier ordre des groupes algébriques affines sur les corps algébriquement clos peut s'envisager sous plusieurs aspects : théorie élémentaire de tels groupes ; liens entre structure "géométrique" et pure structure de groupe ; caractérisation modèle-théorique. Nous insisterons sur ce troisième aspect en présentant d'abord divers cadres modèle-théoriques pour décrire les groupes linéaires. On s'orientera rapidement vers le contexte des groupes de rang de Morley fini, qui généralisent à bien des égards les groupes algébriques affines. Le second volet se concentrera sur la structure interne des groupes de rang de Morley fini mais aussi sur leurs représentations. On mettra notamment l'accent sur les représentations définissables des groupes algébriques affines.

PROGRAMME

- Rappels de théorie des modèles et de théorie des groupes :
  Théorème de Chevalley-Tarski ; constructibilité et définissabilité dans les groupes linéaires. Groupes abéliens divisibles.
- Conditions modèle-théoriques et conditions de chaînes dans les groupes abstraits :
  Groupes sans propriété d'indépendance ; groupes stables ; groupes omega-stables. Digression : groupes dénombrablement catégoriques.
- Groupes de rang de Morley fini :
  Notions de base ; théorème de Macintyre ; engendrement par indécomposables.
- Groupes de rang de Morley fini (2) :
  Groupes abéliens, nilpotents, et résolubles ; conjecture de Cherlin-Zilber ; groupes de petit rang.
- Groupes linéaires de rang de Morley fini :
  Linéarisation de groupes abstraits ; théorème d'algébricité de Poizat ; constructibilité avec automorphismes de corps.
- Modules définissables pour les groupes algébriques Selon temps disponible.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Poizat, Bruno. Groupes stables. Nur al-Mantiq wal-Marifah, Lyon, 1987 ; ISBN 2-9500919-1-1

[2] Borovik, Alexandre et Nesin, Ali. Groups of finite Morley rank. Oxford Logic Guides, 26. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1994 ; ISBN 0-19-853445-0

[3] Marker, David. Model Theory. An introduction. Graduate Texts in Mathematics, 217. Springer-Verlag, New York, 2002 ; ISBN 0-387-98760-6

[4] Martin-Pizarro, Amador. Groupes et corps stables. Notes de cours disponibles en ligne. http://math.univ-lyon1.fr/~pizarro/MTP7.pdf

[5] Sur le site de l'ICJ on trouve diverses resources liées à des enseignements d'esprit voisin. http://math.univ-lyon1.fr/~logicum/logique/enseignements/ens-log.html

FORCING POUR LES MATHÉMATICIENS

Boban VELICKOVIC

La méthode de 'forcing' a été introduite par Paul Cohen en 1963 afin de démontrer l'indépendance de l'Hypothèse du Continu (HC) et l'Axiome du Choix (AC) des axiomes standards ZFC de la théorie des ensembles.
Par la suite, cette méthode a été utilisée pour démontrer de nombreux résultats d'indépendance en théorie des ensembles et d'autres domaines de mathématiques, mais aussi comme outil pour démontrer des théorèmes directement dans ZFC.
Elle est actuellement au cœur du programme de Gödel dont le but est la recherche des nouveaux axiomes pour les mathématiques.
Le but de ce cours est l'introduction au forcing et ses applications en différents domaines de mathématiques : topologie, algèbre commutative, théorie des C*-algèbres, etc.

PROGRAMME

- Rappel sur les bases de la théorie des ensembles : cardinaux, ordinaux, ordres, algèbres de Boole, etc.
- Modèles de ZFC, réflexion, relativisation, l'univers constructible.
- Notions de forcing et extensions génériques, théorème fondamental de forcing.
- Applications I : l'Hypothèse du Continu et l'Axiome de Choix.
- Applications II : le principe 'diamant', arbres de Souslin, automorphismes de \beta N \setminus N, problème de Whitehead, problème de Naimark.
- Forcing itéré : l'axiome de Martin et ses applications, l'axiome de forcing propre (PFA).

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. Jech Set Theory (Springer Verlag 2002)

[2] J.-L. Krivine Theorie des ensembles (Cassini, 1998)

[3] K. Kunen, Set theory, an introduction to independence results (North Holland, 1983)

[4] N. Weaver, Forcing for mathematicians, (World Scientific, 2014)

THÉORIE DESCRIPTIVE DES ENSEMBLES

François Le Maître

En théorie descriptive des ensembles classique, on s'intéresse aux ensembles apparaissant naturellement dans divers domaines des mathématiques, notamment l'analyse fonctionnelle, les systèmes dynamiques ou encore la théorie des groupes. Un des objectifs est d'étudier leur complexité. Par exemple, on peut classifier les sous-ensembles boréliens des réels selon le nombre d'étapes qui sont nécessaires pour les obtenir à partir d'ensembles ouverts en effectuant des unions dénombrables et des passages au complémentaire.

Le cadre général est celui des espaces polonais, où le théorème de Baire est un outil puissant. On s'intéressera d'abord aux sous-ensembles boréliens des espaces polonais, dont on verra qu'ils sont naturellement hiérarchisés par les ordinaux dénombrables. Ensuite viennent les images via une application borélienne de boréliens (ensembles analytiques) et leurs complémentaires (ensembles coanalytiques). On verra notamment une méthode permettant de montrer qu'un ensemble est coanalytique mais non borélien.

Le cours se terminera par une introduction aux groupes polonais et à l'étude des relations d'équivalence engendrées par leurs actions, par exemple la relation d'isomorphisme entre graphes dénombrables. On démontrera le théorème de turbulence de Hjorth, qui permet de montrer que certaines relations d'équivalence sont plus compliquées que les relations d'isomorphisme entre structures dénombrables.

PROGRAMME

I/ Espaces polonais (16h)

- Définition et premières propriétés.
- Théorème de Baire et applications.
- Espace de Cantor, espace de Baire.
- Hiérarchie borélienne.

II/ Boréliens standards (8h)

- Exemple de l'espace des fermés d'un espace polonais.
- Théorème de sélection.
- Raffinements de topologie.
- Théorème de Schröder-Bernstein borélien, unicité.

III/Ensembles analytiques et coanalytiques (12h)

- Théorème de séparation de Lusin.
- Arbres bien fondés, rang.
- Rang coanalytique.

IV/ Application : groupes polonais et relations d'équivalence orbitales (12h)

- Introduction aux groupes polonais.
- Relations d'équivalence orbitales.
- Turbulence.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Gao, S., Invariant descriptive set theory, Pure and Applied Mathematics (Boca Raton), 293. CRC Press.

[2] Hjorth, G. Classification and orbit equivalence relations, Mathematical Surveys and Monographs, 75. AMS.

[3] Kechris, A. S. Classical descriptive set theory. Graduate Texts in Mathematics, 156. Springer-Verlag.

[4] Melleray, J. Théorie descriptive des groupes. http://math.univ-lyon1.fr/~melleray/M2-09.pdf

[5] Srivastava, S. M. A course on Borel sets. Graduate Texts in Mathematics, 180. Springer-Verlag.

PREUVES ET PROGRAMMES : OUTILS CLASSIQUES

Damiano Mazza & Michèle Pagani

La théorie de la démonstration a connu au moins deux évolutions majeures au cours du siècle dernier suite aux théorèmes d'incomplétude de Gödel. La première a eu lieu dans les années 30, immédiatement après les résultats d'incomplétude, avec l'introduction et l'étude de la déduction naturelle et du calcul des séquents par Gentzen et du lambda-calcul par Church. Church montrait alors l'indécidabilité du calcul des prédicats via le lambda-calcul tout en introduisant un modèle de calcul universel tandis que Gentzen déduisait la consistance de divers systèmes logiques comme corollaire de l'élimination des coupures en calcul des séquents.

La seconde étape a eu lieu dans les années 60 avec la mise en évidence progressive, par le biais de la correspondance de Curry-Howard, des liens profonds entre preuves et programmes, depuis la correspondance entre lambda-calcul simplement typé et déduction naturelle propositionnelle minimale jusqu'aux diverses extensions de cette correspondance au second ordre, à la logique classique et jusqu'à l'émergence de la notion de linéarité en théorie de la démonstration. La logique linéaire a profondément renouvelé les liens entre la sémantique formelle des langages de programmation d'un côté et la théorie de la démonstration de l'autre. L'algèbre linéaire s'impose comme troisième pôle de cette correspondance, en mettant au centre la notion de ressource du calcul.

Le cours fondamental a traité de la première étape. Ce cours sera consacré aux développements depuis les années 60 et présentera les outils classiques pour l'étude de la correspondance de Curry-Howard. Après quelques rappels et compléments du cours fondamental, le cours se concentrera sur deux concepts fondamentaux, le second-ordre et la linéarité, et à leurs développements, notamment dans un cadre algébrique. On appliquera notamment les résultats du cours à l'étude de PCF, un langage de programmation idéalisé.

PROGRAMME

- Introduction et compléments (rappels sur le lambda-calcul et la théorie de la démonstration).
- Trois exemples de lambda-calcul : lambda-calcul simplement typé, Système F (Logique et arithmétique du second-ordre, théorème de normalisation forte) et PCF.
- Interprétation du lambda-calcul simplement typé et de PCF dans une catégorie cartésienne fermée, exemples de CCC (domaines de Scott, sémantique relationnelle, modèles vectoriels), théorème d'adéquation.
- Logique linéaire (décomposition linéaire, calcul des séquents linéaire, réseaux de preuves et correction, élimination des coupures, traductions linéaires du lambda-calcul).
- Sémantique catégorique de LL, exemples de modèles (domaines de Scott, sémantique relationnelle, modèles vectoriels).
- Espaces cohérentes probabilistes et la complète adéquation pour PCF probabiliste.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. AMADIO, P.-L. CURIEN : Domains and lambda-calculi (Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 46, Cambridge University Press, 1998).

[6] P.-L. CURIEN, H. HERBELIN, J.-L. KRIVINE, P.-A. MELLIES : Interactive Models of Computation and Program Behavior (Panorama et Synthèses, Société mathématique de France, 2009).

[7] R. DAVID, K. NOUR, C. RAFFALLI : Introduction à la logique Théorie de la démonstration (Sciences Sup, Dunod, 2004).

[8] J.-Y. GIRARD, Y. LAFONT, P. TAYLOR : Proofs and Types (Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 7, Cambridge University Press, 1989, disponible sur la page de P. Taylor).

[9] J.-Y. GIRARD : Le Point Aveugle Cours de logique, Tomes 1 et 2 (Collection Visions des Sciences, Hermann, 2006-2007).

[10] J.-L. KRIVINE : Lambda-calcul : Types et Modèles (Masson, 1990, ou E. HORWOOD : Lambda-calculus : types and models version augmentée, en anglais, 1992).

[11] B.C. PIERCE : Types and Programming Languages (MIT Press, 2002).

CONTENU CALCULATOIRE DES PREUVES DE LA LOGIQUE CLASSIQUE

Hugo HERBELIN

La correspondance dite de Curry-Howard souligne que les preuves ont la même structure qu'un programme, fournissant une incarnation calculatoire au théorème d'élimination des coupures de Gentzen. Longtemps cantonnée au cas de la logique intuitionniste, dans la foulée du slogan de Brouwer qu'une preuve devrait être vue comme un processus de construction, cette correspondance a été étendue au cas de la logique classique au début des années 90. Ce cours posera les bases techniques des recherches actuelles visant à étendre la correspondance preuve-programme encore quelques crans plus loin. On abordera tout autant le style direct (une preuve calcule avec des effets), que le style indirect (les effets se simulent par traduction dans un cadre purement intuitionniste), que l'approche par réalisabilité (une preuve se découple en un programme et une preuve de correction de ce programme).

PROGRAMME

La correspondance preuve-programme pour la logique classique

- Opérateurs de contrôle (call-cc, abort, C, ...) et axiomes classiques (loi de Peirce, tiers-exclu, ...)
- Lambda-calculs pour la logique classique : lambda-mu-calcul et déduction naturelle classique, système mu-mu-tilde et LKtq
- Sémantiques opérationnelles de la logique classique : appel par nom et LKT, appel par valeur et LKQ
- L'interprétation de la logique classique en logique intuitionniste et ses limites : polarisation, traductions par double négation et par passage de continuation, quantification existentielle forte
- Modèles catégoriques de la logique classique calculatoire

Réalisabilité intuitionniste et classique

- Réalisabilité de Kleene
- Réalisabilité modifiée de Kreisel
- Interprétation fonctionnelle de Gödel
- Internalisation de la réalisabilité (indépendance des prémisses, principe de Markov, axiome du choix intensionnel)
- Réalisabilité classique de Krivine
- Modèles catégoriques de la réalisabilité

Extensions de l'interprétation calculatoire de la logique classique

- Délimiteurs de contrôle, exceptions, A-traduction de Friedman, traduction de Coquand-Hofmann
- Affectation mémoire et forcing
- Application au contenu calculatoire des théorèmes de complétude des calculs des prédicats intuitionniste et classique

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.Y. GIRARD, Y. LAFONT & P. TAYLOR : Proofs and Types (Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 7, Cambridge University Press, 1989).

[12] J.Y. GIRARD : Le Point Aveugle (Cours de Logique, Tomes 1 & 2, Collection Visions des Sciences, Hermann, 2006-2007).

[13] U. KOHLENBACH : Applied Proof Theory : Proof Interpretations and their Use in Mathematics (Springer Monographs in Mathematics, 2008).

[14] J.-L. KRIVINE : Lambda-calcul, types et modèles (Masson, 1990).

[15] H. SCHWICHTENBERG, S. WAINER : Proofs and computations (Cambridge University Press, 2011)

[16] M. SØRENSEN, P. URZYCZYN : Lectures on the Curry-Howard Isomorphism (Volume 149, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 2006).

AUTOMATES SUR MOTS FINIS OU INFINIS

Didier CAUCAL & Olivier FINKEL

L'objectif de ce cours est de présenter les résultats fondamentaux et les problèmes actuels en théorie des automates et des langages formels sur les mots finis ou infinis, sujet central en informatique théorique.
En particulier, on présentera la hiérarchie de Chomsky de langages de mots finis formée des langages rationnels, algébriques, contextuels, et récursivement énumérables, et la hiérarchie infinie des langages indexés, définie par Maslov [6].
Les automates sur mots infinis ont été introduits par Büchi dans les années 1960 pour étudier la décidabilité de la théorie d'un successeur sur les entiers. Ils ont depuis été très étudiés et utilisés pour la spécification et la vérification de systèmes ne terminant pas, comme un système d'exploitation.
La théorie des automates lisant des mots infinis a des liens avec de nombreux domaines, en particulier avec la topologie, la logique, les jeux infinis qui modélisent le comportement d'un système en interaction avec un environnement.

PROGRAMME

Automates sur les mots finis

– Automates finis, expressions régulières, théorème de Kleene
– Automates à pile, grammaires algébriques, langages algébriques, théorème de Muller-Schupp
– Langages contextuels, machines de Turing linéairement bornées
– Langages acceptés par les machines de Turing, langages récursivement énumérables
– Hiérarchie infinie des langages indexés, définie par Maslov, automates à pile de piles, description structurelle de ces automates et théorie au deuxième ordre monadique décidable.

Automates sur les mots infinis

– Automates de Büchi, de Muller, déterminisation, complémentation
– Automates et théorie monadique sur les entiers
– Topologie, théorie descriptive des ensembles, caractérisation de certaines classes d'automates
– Jeux infinis, jeux de parité, jeux sur les graphes finis, existence et construction de stratégies gagnantes effectives dans ces jeux
– Extensions possibles : automates temporisés, automates d'arbres infinis, automates sur mots de longueur transfinie …

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. R. Büchi, On a Decision Method in Restricted Second Order Arithmetic (Logic Methodology and Philosophy of Science, (Proc. 1960 Int. Congr.), Stanford University Press, 1962, p. 1-11).
[2] O. Carton, Langages Formels (Calculabilité et Complexité, Vuibert, 2014).
[3] E. Grädel, W. Thomas & T. Wilke (editors) : Automata, Logics, and Infinite Games (A Guide to Current Research, Lecture Notes in Computer Science, Volume 2500, Springer, 2002).
[4] M. Harrison, Introduction to formal language theory, Addison-Wesley (1978).
[5] J. Hopcroft et J. Ullman, Introduction to automata theory, languages and computation, Addison-Wesley (1979).
[6] A. Maslov, The hierarchy of indexed languages of an arbitrary level, Doklady Akademii Nauk SSSR 217, 1013-1016 (1974).
[7] D. Muller et P. Schupp, The theory of ends, pushdown automata, and second-order logic, Theoretical Computer Science 37, 51-75 (1985).
[8] D. Perrin & J.-E. Pin, Infinite Words, Automata, Semigroups (Logic and Games, Volume 141 of Pure and Applied Mathematics, Elsevier, 2004).
[9] L. Staiger, ω-Languages, in Handbook of Formal Languages (Volume 3, edited by G. Rozenberg and A. Salomaa, Springer-Verlag, Berlin, 1997).
[10] W. Thomas, Automata on Infinite Object (J. Van Leeuwen, ed., Handbook of Theoretical Computer Science, Volume B, Elsevier, Amsterdam, 1990, p. 133-191).
[11] W. Thomas, Languages, Automata and Logic (Handbook of Formal Languages, Volume 3, edited by G. Rozenberg and A. Salomaa, Springer Verlag, Berlin, 1997).

LOGIQUES ET LANGAGES POUR LA COMPLEXITÉ

Patrick BAILLOT & Arnaud DURAND

Les classes de complexité sont classiquement définies par des modèles de machines et des bornes sur l'utilisation des ressources (le temps et l'espace, par exemple). Cependant pour mieux les comprendre il est tentant de chercher à les caractériser de manière plus déclarative, sans référence aux machines ni aux bornes. La logique se révèle être un outil fondamental pour cela.

Diverses approches ont été proposées dans ce but, reposant soit sur l'idée de décrire ce que l'on peut calculer, soit sur celle de décrire comment on peut calculer. La première voie est celle de la *complexité descriptive*, qui s'appuie sur la théorie des modèles finis. La seconde est celle de la *complexité implicite*, qui se nourrit de la théorie de la démonstration.

Ces caractérisations permettent en retour de définir d'une part des langages de requêtes pour les bases de données avec des bornes de complexité pour l'évaluation des requêtes, d'autre part des langages de programmation avec des bornes de complexité sur le temps d'exécution.
Ce cours propose une introduction croisée aux domaines de la complexité descriptive et de la complexité implicite, en cherchant à dégager leurs principaux concepts, de leurs fondements logiques à leurs déclinaisons dans plusieurs langages.

PROGRAMME

- Caractérisations logiques des classes de complexité : logique existentielle du second-ordre (ESO) et NP (Fagin), fragments de ESO, la logique du premier ordre (FO) et classes de circuits, définissabilité et jeux d'Ehrenfeucht-Fraïssé, bornes inférieures, temps polynomial et structures non ordonnées.

- Caractérisations par contrôle de l'induction ou de la récursion : logique du second-ordre et prouvabilité pour FP, récursion ramifiée pour FP et PSPACE.

- Caractérisations par contrôle de l'espace de calcul : systèmes de reécriture du 1er ordre, méthodes d'interprétations.

- Caractérisations par points-fixes : logiques à points fixes pour P et PSPACE, Datalog, extension de Datalog avec négation, programmes "while".

- Caractérisations par contrôle de la duplication : logique linéaire, logique linéaire élémentaire, pour P, EXPTIME et temps élémentaire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Stephen Bellantoni, Stephen A. Cook : A New Recursion-Theoretic Characterization of the Polytime Functions. Computational Complexity 2 : 97-110 (1992)

[2] Kees Doets, Basic Model Theory, CSLI Publications Center for the Study of Language and Information, Stanford, California

[3] Jean-Yves Girard : Light Linear Logic. Inf. Comput. 143(2) : 175-204 (1998)

[4] Neil Immerman, Descriptive Complexity, Springer, 1999

[5] Neil D. Jones : Computability and complexity - from a programming perspective. Foundations of computing series, MIT Press 1997, ISBN 978-0-262-10064-9, pp. I-XVI, 1-466

[6] Daniel Leivant, Jean-Yves Marion : Ramified Recurrence and Computational Complexity II : Substitution and Poly-Space. CSL 1994 : 486-500

[7] Leonid Libkin, Elements of finite model theory, Springer, 2004

MODÈLES DE LA PROGRAMMATION

Pierre LETOUZEY

Ce cours propose une mise à niveau en programmation à travers divers styles de conception et d'écriture des programmes : fonctionnel, impératif et objet.

Le cours s'appuiera sur le langage O'Caml autorisant les trois styles évoqués. Il sera accompagné de séances de travaux dirigés en salle machine.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. CHAILLOUX, P. MANOURY & B. PAGANO : Développements d'applications avec Objective Caml (O'Reilly, 2000).

[17] G. COUSINEAU & M. MAUNY : Approche fonctionnelle de la programmation (Ediscience, 1995).

[18] C.A. GUNTER : Semantics of Programming Languages : structures and techniques. Foundations of Computing (MIT Press, 1992).

[19] X. LEROY et alii : The OCaml System (Documentation and user's guide, release 4.02, http://caml.inria.fr)

INITIATION À LA PREUVE FORMELLE ASSISTÉE PAR ORDINATEUR

Pierre LETOUZEY

Depuis plusieurs années, la preuve formelle sur machine se développe.
De nombreux systèmes existent maintenant, tels que Coq, Isabelle, HOL, Mizar, Agda, et bien d'autres encore. Ce cours débutera par un tour d'horizon de ces différents systèmes et de leurs fondements logiques, avant d'étudier plus en détail le fonctionnement de Coq. Les séances pratiques permettront une prise en main de Coq, puis la réalisation de preuves formelles de résultats mathématiques (non-triviaux).
Selon le temps disponible, on pourra éventuellement aborder la certification de petits programmes ML.
Ce cours se concluera par un projet à réaliser en Coq.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. David, K. Nour et C. Raffalli, Introduction à la logique : théorie de la démonstration, Dunod, Paris, 2001.

[2] Y. Bertot et P. Castéran, Interactive Theorem Proving and Program Development. Coq'Art : The Calculus of Inductive Constructions. Springer Verlag, 2004. http://www.labri.fr/perso/casteran/CoqArt

[3] F. Wiedijk ed., The Seventeen Provers of the World, LNCS vol. 3600, Springer Verlag, 2006. http://www.cs.ru.nl/~freek/comparison/comparison.pdf

O-MINIMALITÉ

Tamara SERVI

PROGRAMME

Notre point de départ sera le théorème de Tarski (? 1930), dont on donne ici deux formulations.

Formulation modèle-théorique : la théorie complète du corps ordonné des réels admet l'élimination des quantificateurs et une axiomatisation récursive (celle des corps réels clos).

Formulation géométrique : la projection d'un ensemble semi-algébrique (c.a.d. un ensemble défini à l'aide d'un nombre fini d'équations et d'inéquations polynomiales) est également semi-algébrique.

Le Problème de Tarski se propose d'étendre les résultats du théorème de Tarski à des ensembles définis au moyen de certaines fonctions transcendantes réelles, telles que la fonction exponentielle.
La notion de structure o-minimale a été introduite par van den Dries (1984) en vue de l'étude de ce problème.
La géométrie o-minimale, qui étend la géométrie semi-algébrique, étudie les propriétés topologiques d'une famille d'ensembles obtenus par des constructions naturelles à partir de certaines fonctions réelles (en clair, la famille des ensembles définissables dans l'expansion du corps réel par les fonctions réelles considérées) ; une telle famille est assez riche pour inclure suffisamment de constructions intéressantes, et on demande que cette famille d'ensembles n'engendre pas de phénomènes "pathologiques" (par exemple on souhaite associer une notion raisonnable de dimension à ces ensembles, et l'on veut en exclure les phénomènes oscillatoires).

L'étude des structures o-minimales s'est développée en plusieurs directions (vers la théorie des modèles ou vers la géométrie réelle) et sur plusieurs niveaux de généralité. Dans ce cours on considérera principalement les expansions o-minimales de corps ordonnés et la géométrie de leurs ensembles définissables.
Dans la première partie du cours on donnera une introduction aux structures o-minimales, en présentant les propriétés principales qui caractérisent ces structures. On démontrera en suite le théorème de Tarski et les propriétés des corps réels clos.
Si le temps le permet, on présentera le théorème de Denef et van den Dries (1988) d'élimination des quantificateurs pour l'expansion du corps réel par les fonctions analytiques restreintes à des compacts, et par la fonction $1/x$. Il s'agit d'une structure o-minimale, dont les ensembles définissables sont les ensembles sous-analytiques globaux. Que peut-on dire de la fonction exponentielle définie sur toute la droite réelle (et pas seulement sur des compacts) ?

Le cours n'a pas de prérequis, autre que les notions classiques de topologie et d'analyse de base sur $\mathbb{R}^n$ apprises au cours de la licence. Des rudiments de logique et théorie des modèles pourront être utiles, mais les notions nécessaires seront rappelées en cours.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Bochnak, M. Coste, and M.-F. Roy. Real algebraic geometry, volume 36 of Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]. Springer-Verlag, Berlin, 1998. Translated from the 1987 French original, Revised by the authors.

[2] M. Coste. An introduction to semialgebraic geometry. Dipartimento di Matematica Dell'Universita di Pisa, 1975.

[3] M. Coste. An Introduction to o-minimal Geometry. Dip. Mat. Univ. Pisa, Dottorato di Ricerca in Matematica, 2000. Dipartimento di Matematica Dell'Universita di Pisa.

[4] J. Denef and L. van den Dries. p-adic and real subanalytic sets. Ann. of Math. (2), 128(1) : 79–138, 1988.

[5] L. van den Dries. Tame topology and o-minimal structures, volume 248 of London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[6] L. van den Dries. o-minimal structures and real analytic geometry. In Current developments in mathematics, 1998 (Cambridge, MA), pages 105–152. Int. Press, Somerville, MA, 1999.