2018
2019

Master 2 LOGIQUE MATHEMATIQUE ET FONDEMENTS DE L'INFORMATIQUE

Domaine : Sciences, Technologies, Santé
Mention : Mathématiques et Applications

Responsables pédagogiques :

Christine Tasson & Boban Velickovic

http://www.math.univ-paris-diderot.fr/m2lmfi/

SOMMAIRE

Le M2 LMFI est le seul M2 français dédié à la logique mathématique et à ses applications à l'informatique. Il forme des logiciens de haut niveau et les prépare au doctorat, aux carrières universitaires, à l'enseignement et à des métiers de la R&D.

Cette formation, qui est l'une des spécialités du Master mention Mathématiques et Applications de l'Université Paris Diderot - Paris 7, est le fruit d'une longue tradition logique à Paris 7, notamment à travers le DEA de Logique de l'Université Paris 7.

Le M2 LMFI s'appuie sur deux laboratoires d'accueil prestigieux, de l'Université Paris-Diderot et du CNRS, couvrant la plupart des branches de la logique mathématique et informatique :

- Équipe de Logique Mathématique de l'Institut de Mathématiques de Jussieu (IMJ)
  UMR 7586 du CNRS – http://www.imj-prg.fr/lm/
- L'Institut de Recherche en Informatique Fondamentale (IRIF)
  UMR 8243 du CNRS – https://www.irif.fr

CONTACTS

Responsables pédagogiques du M2 :

Christine Tasson	***Boban Velickovic***
christine.tasson@irif.fr	boban@math.univ-paris-diderot.fr

Localisation : Site PRG (13ème) Bâtiment Sophie Germain
8 place Aurélie Nemours

3ème étage, bureau 3040 – 01 57 27 93 37 | 6ème étage, bureau 6020 - 01 57 27 91 03

Le secrétariat du M2 : Catherine PRUDLO

catherine.prudlo@univ-paris-diderot.fr

5ème étage, bureau 5055 - 01 57 27 93 06

Adresse postale : Université Paris Diderot – Paris 7
UFR de Mathématiques
Bâtiment Sophie Germain – Case 7012
75205 Paris cedex 13

Site internet du M2 :
http://www.math.univ-paris-diderot.fr/m2lmfi

CONDITIONS D'ADMISSION

Le candidat devra avoir validé une 1ère année de Master (M1), une Maîtrise ou un titre équivalent.
Cette première année devra avoir été effectuée dans une spécialité mathématique, informatique, ou logique (dans ce dernier cas, par exemple, dans le cadre d'un master de philosophie).

- Candidature des étudiants étrangers (hors EEE et Suisse) :
  Afin de faciliter la mobilité internationale, l'Université Paris Diderot adhère à l'Agence Campus France. Nous invitons les étudiants des pays concernés (https://www.campusfrance.org/fr/inscription-enseignement-superieur-France) à se renseigner sur le site de Campus France (http://www.campusfrance.org/fr) et à s'inscrire auprès de cet organisme avant mars 2018.

- Pour toutes les autres candidatures : Les étudiants doivent déposer une demande de pré-inscription sur le site web : https://ecandidat.app.univ-paris-diderot.fr puis transmettre par voie postale le dossier de préinscription avec les pièces justificatives.

  Période de préinscription sur e-candidat :
  Du 1er mai 2018 au 10 juillet 2018.
  Du 25 août 2018 au 15 septembre 2018.
  Les dossiers de candidature envoyés avant le 15 juillet 2018 bénéficieront d'une réponse mi-juillet, les autres en septembre.

  Date limite de remise du dossier d'admission : 15 septembre 2018.

  Date limite d'inscription administrative : 15 octobre 2018.

Pour toute demande de renseignement complémentaire, vous pouvez consulter le site :

http://www.math.univ-paris-diderot.fr/m2lmfi/

ou vous adresser aux Responsables de la formation ou au secrétariat du master 2 (voir la rubrique contact).

VALIDATION DU M2 LMFI

La validation de la 2ème année de Master correspond à l'acquisition de 60 crédits ECTS selon les modalités suivantes :

- Validation des quatre cours fondamentaux (20 ECTS).
- Validation de deux cours d'orientation (8 ECTS chacun).
- Validation de 8 ECTS d'ouverture, qui peuvent être obtenues, au choix :
  - par la validation de deux cours d'ouverture (24h et 4 ECTS chacun)
  - par la validation d'un troisième cours d'orientation (8 ECTS)
- Le stage est crédité de 16 ECTS.

Les cours d'orientation sont à choisir dans la liste proposée par le M2 (voir les cours spécialisés décrits dans la présente brochure) ou, après accord des responsables, parmi des unités d'un autre M2, par exemple dans le M2 Mathématiques Fondamentales ou dans le MPRI (Master Parisien de Recherche en Informatique).

L'attribution des ECTS correspondant à chacun des modules précédents est conditionnée par l'obtention, pour ce module, d'une note supérieure ou égale à 10. Cependant une compensation est possible entre les quatre notes F_1 , F_2, F_3 , F_4 des cours fondamentaux, sous réserve qu'elles soient toutes les quatre supérieures ou égales à 7 et que leur moyenne soit supérieure ou égale à 10.

Il est attribué une note finale du M2, qui est la moyenne entre $[(F_1xC1+F_2xC2+F_3xC3+F_4xC4)/(C1+C2+C3+C4)]$, O_1, O_2 et S, où F_1, F_2, F_3, F_4 sont les notes obtenues en cours fondamentaux, C_1, C_2, C_3, C_4 sont les coefficients (respectivement 4, 4, 4 et 8), O_1 et O_2 sont les notes obtenues aux cours d'orientation et S la note de stage.

Les notes obtenues aux modules des cours d'ouverture n'interviennent donc pas dans la note finale, mais conditionnent l'obtention des crédits correspondants.

Le cours préliminaire de logique est facultatif mais fortement recommandé pour la validation du 1er semestre car il expose les pré-requis de logique.

Jury du Master

Le jury du M2 de Logique Mathématique et Fondements de l'Informatique est nommé en début d'année universitaire. Pour information, le jury était constitué comme suit pour l'année universitaire 2017-2018 :

VELICKOVIC Boban,	Professeur à l'Université Paris Diderot - Paris 7, Président
SAURIN Alexis,	Chargé de recherche CNRS,
DURAND Arnaud,	Professeur à l'Université Paris Diderot - Paris 7, Directeur de l'UFR
BOUSCAREN Elisabeth	Directeur de recherche, Université Paris Sud
DZAMONJA Mirna,	Professeur à l'Université Panthéon Sorbonne Paris 1,
MALOD Guillaume	Maître de Conférences à l'Université Paris Diderot - Paris 7,
PAGANI Michèle,	Professeur à l'Université Paris Diderot - Paris 7

INFORMATIONS PRATIQUES

Bourses et/ou logement en résidence universitaire

Le ministère chargé de l'Enseignement supérieur accorde aux étudiants, un certain nombre d'aides gérées par le CROUS, en lien avec les universités : bourses sur critères sociaux, aide d'urgence annuelle, bourses de mobilité, passeport mobilité, prêts d'honneur, bourses de mérite...

Pour de plus amples informations, vous pouvez consulter :

- les différents types de bourses et les aides financières : https://etudes-formations.univ-paris-diderot.fr/bourses-et-aides-financieres-0

- bourse d'étude de la FSMP : la Fondation des Sciences Mathématiques de Paris dispose d'un programme de financement de bourse de master, le programme PGSM, qui permet d'obtenir des bourses pour financer le master. La candidature s'effectue vers le mois de janvier de l'année précédent l'inscription en M2 : https://www.sciencesmaths-paris.fr

- le CNOUS : http://www.etudiant.gouv.fr/pid33797/cnous-crous.html

- l'accompagnement au sein de Paris Diderot : https://universite.univ-paris-diderot.fr/accompagnement-au-sein-de-paris-diderot

Restauration

Le campus de Paris Diderot dispose d'un restaurant universitaire.

Étudiants en situation de handicap :

Le relais handicap de l'Université Paris Diderot (https://relais-handicap.univ-paris-diderot.fr) met en œuvre les aménagements permettant aux étudiants en situation de handicap de suivre leurs études et de participer à la vie étudiante dans les meilleures conditions.
Tout étudiant handicapé ou rencontrant des difficultés de santé, quelle que soit la nature de l'affection en cause (motrice, psychique, sensorielle, maladie invalidante…), peut bénéficier, s'il le souhaite, des services du Relais handicap. Tél : 01 57 27 65 20 – Email : handicap@univ-paris-diderot.fr

Ressources documentaires et informatiques pour les étudiants

Les étudiants du M2 ont accès à la bibliothèque de Mathématiques-Recherche (Bâtiment Sophie Germain, 8ème étage) ainsi qu'à quelques ouvrages mis à la disposition des étudiants par le M2.

Par ailleurs, l'Université Paris Diderot dispose de salles informatiques et de salles de travail en accès libre pour les étudiants.

Les laboratoires d'accueil du M2 sont situés dans le bâtiment Sophie Germain et les étudiants du M2 sont encouragés à assister aux séminaires de recherche de ces laboratoires, au moins à partir du début du second semestre.

APRÈS LE M2 LMFI...

Débouchés

La suite naturelle de cette formation est la préparation d'un doctorat, soit en logique mathématique, soit en informatique. Pour un doctorat en informatique, la thèse peut éventuellement être préparée dans une entreprise ou un organisme public de recherche (INRIA, CEA…).

Les débouchés sont des postes d'enseignant-chercheur ou de chercheur :

- soit dans le milieu universitaire (français ou étranger) ou des organismes publics de recherche (CNRS, INRIA, CEA, ONERA, etc.).
- soit dans les services de recherche et développement d'entreprises du monde industriel (EDF, France Telecom, Siemens, EADS, etc.).

Les services de recherche et développement de ces entreprises sont particulièrement demandeurs d'étudiants ayant une forte compétence à la fois mathématique, logique et informatique, leur permettant d'encadrer des ingénieurs travaillant dans les domaines de la certification de logiciels, de la vérification de programmes et de protocoles, ainsi que de la sécurité informatique. Dans certains cas, le recrutement peut s'effectuer directement à l'issue du master 2ème année.

Le Doctorat

La durée conseillée des études doctorales est de trois ans. Une année supplémentaire peut être accordée après examen du dossier (comprenant un rapport du directeur de thèse prouvant l'avancement des travaux) et autorisation du directeur de thèse, du directeur de l'École Doctorale, et du Président de l'Université. Le doctorat débute normalement en 6ème année des études universitaires et s'adresse aux étudiants titulaires d'un Master ou d'un diplôme de niveau équivalent.

Contrat doctoral

Il s'agit d'un contrat d'une durée de 3 ans.
L'École Doctorale Sciences Mathématiques de Paris-Centre dispose d'un petit nombre de ces contrats pour les étudiants titulaires du Master et désireux de préparer une thèse de doctorat.
Rémunération :

> 1684,93 euros brut si le doctorant contractuel effectue uniquement de la recherche. Cette somme est majorée lorsque l'étudiant effectue des activités complémentaires, par exemple de l'enseignement.

D'autres types de financements sont possibles : projets ANR, bourses INRIA, allocations de la région Île-de-France, allocations doctorales PGSM, ...

Conditions d'obtention du contrat doctoral : l'étudiant qui désire obtenir un contrat doctoral en vue de préparer une thèse doit faire acte de candidature auprès des responsables du M2 au cours de l'année universitaire.
Le jury du M2 établit un classement des dossiers (sur critères scientifiques). L'examen des dossiers a lieu pendant la deuxième quinzaine du mois de juin.
Les étudiants de nationalité étrangère, hors Union Européenne, sont invités à se renseigner sur les conditions exigées dans leur cas.

LISTE DES ENSEIGNEMENTS 2018-2019

1er SEMESTRE

Cours préliminaire intensif de logique (Patrick Simonetta et Pierre Letouzey)

Cours fondamentaux

- Théorie des modèles (Tomás Ibarlucia)
- Théorie de la démonstration (Thierry Joly)
- Théorie des ensembles (François Le Maître)
- Calculabilité et incomplétude (Guillaume Malod et Paul Rozière)

2ème SEMESTRE

Cours d'orientation

- Théorie des modèles :
  Outils classiques (Tamara Servi)
  Corps pseudo-finis (Sylvain Rideau)

- Théorie des ensembles :
  Outils classiques (Boban Velickovic)
  Théorie descriptive des ensembles (Dominique Lecomte)

- Preuves et programmes :
  Outils classiques (Alexis Saurin & Christine Tasson)
  Théorie des types homotopiques (Hugo Herbelin et Nicolas Tabareau)

- Calculabilité et complexité :
  Calculabilité et complexité en analyse (Olivier Bournez & Joris Van des Hoeven)
  Complexité algébrique (Hervé Fournier & Guillaume Malod)

Cours d'ouverture

- Programmation fonctionnelle en Coq (Pierre Letouzey)
- Preuve formelle en Coq (Pierre Letouzey)

COURS PRÉLIMINAIRE INTENSIF DE LOGIQUE

(Du 3 au 14 septembre 2018)

Patrick Simonetta et Pierre Letouzey

PROGRAMME

Calcul des propositions : tables de vérité, tautologies, formes normales, compacité.

Calcul des prédicats : langages du premier ordre, termes, formules, modèles ; satisfaction d'une formule dans un modèle ; sous-structures ; isomorphismes ; équivalence élémentaire.

Théorie des ensembles : axiomes de Zermelo-Frænkel ; cardinaux ; théorèmes de Cantor et de Cantor-Bernstein ; ensembles finis, ensembles dénombrables.

Introduction à la programmation : Mise à niveau en programmation fonctionnelle Ocaml ; Lien avec le lambda-calcul, récursivité, typage ML ; structures de données usuelles (booléens, entiers, listes, options, arbres, ...).

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. CORI & D. LASCAR : Logique mathématique : cours et exercices (nouvelle édition, Dunod, 2 tomes, 2003, chapitres 1, 3, 7).

[2] P. HALMOS : Introduction à la théorie des ensembles (Gauthiers-Villars, 1967 ; reimpression : Jacques Gabay, 1997). Version originale : Naïve Set Theory, (Van Nostrand, 1960, dernière édition : Springer, 1998)

[3] E. CHAILLOUX, P. MANOURY & B. PAGANO : Développements d'applications avec Objective Caml (O'Reilly, 2000).

COURS FONDAMENTAL DE LOGIQUE MATHÉMATIQUE I :
THÉORIE DES MODÈLES

Tomás Ibarlucia

PROGRAMME

- Ultraproduits, compacité.
- Extensions élémentaires, Théorèmes de Lowenheim-Skolem.
- Méthode des diagrammes, théorèmes de préservation.
- Va et vients, élimination des quantificateurs.
- Espace des types, théorème d'omission des types, modèles kappa-saturés, modèles atomiques.
- Théories oméga-catégoriques, théorème de Ryll-Nardzewski.
- Décidabilité de quelques théories axiomatiques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C.C. CHANG & H.J. KEISLER, Model Theory, North-Holland, 1990.
[2] R. CORI & D. LASCAR, Logique mathématique : cours et exercices, Dunod, 2 tomes, 2003.
[3] W. HODGES, Model Theory, Cambridge University Press, 1993.
[4] D. MARKER, Model theory, An introduction, Graduate Texts in Mathematics, 217, Springer- Verlag, New York, 2002.
[5] B. POIZAT, Cours de Théorie des Modèles, Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, 1985. [Version anglaise éditée chez Springer en 2000.]
[6] K. TENT & M. ZIEGLER, A Course in Model Theory. Lecture Notes in Logic, Cambridge University.

COURS FONDAMENTAL DE LOGIQUE MATHÉMATIQUE II :
THÉORIE DE LA DÉMONSTRATION

Thierry Joly

PROGRAMME

- Théorème de complétude du calcul des séquents égalitaire LK par les témoins de Henkin.
- Calcul des séquents : Élimination des coupures et théorème du séquent médian dans LK. Théorème de Herbrand. Sous-calcul LJ : la logique intuitionniste et son interprétation BHK. Propriétés de la sous-formule et du témoin existentiel dans LJ.
- Déduction naturelle : Systèmes NK et NJ. Élimination des coupures de NJ. Propriétés de la sous-formule et du témoin existentiel dans NJ, puis dans HA (arithmétique intuitionniste).
- Lambda-calcul : Propriétés de confluence et de standardisation. Représentation des fonctions récursives. Système T. Correspondance de Curry-Howard. Réalisabilité, normalisation forte et correction des programmes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. CORI, D. LASCAR. Logique mathématique, tomes 1 & 2 (Dunod, 2003).

[2] R. DAVID, K. NOUR, C. RAFFALLI. Introduction à la logique - Théorie de la démonstration (Dunod, 2004).

[3] A.S. TROELSTRA & D. VAN DALEN. Constructivism in mathematics, Vol. I (North-Holland, 1988).

[4] J.-Y. GIRARD, Y. LAFONT & P. TAYLOR : Proofs and Types (Cambridge University Press, 1989, disponible sur la page de P. Taylor).

[5] J.-L. KRIVINE. Lambda-calcul : Types et Modèles (Masson, 1990, existe en version anglaise et augmentée, disponible sur la page de l'auteur).

COURS FONDAMENTAL DE LOGIQUE MATHÉMATIQUE III :
THÉORIE DES ENSEMBLES

François Le Maître

PROGRAMME

- ordinaux, récurrence transfinie ;
- axiome du choix et énoncés équivalents ;
- arithmétique des cardinaux infinis ; cofinalité, cardinaux réguliers et singuliers, théorème de König ;
- la hiérarchie de von Neumann, théorèmes de réflexion ;
- filtres et ultrafiltres, ensembles stationnaires dans ω_1, lemme de Fodor ;
- relations bien fondées et collapse de Mostowski ;
- quelques éléments de la théorie descriptive.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Cori, R. et Lascar, D., Logique mathématique : cours et exercices, Dunod, 2003.
[2] Hrbacek, K. et Jech, T., Introduction to set theory, Third edition, Marcel Dekker, 1999.
[3] Krivine, J.L., Théorie des ensembles, Cassini, 1998.

COURS FONDAMENTAL DE LOGIQUE MATHÉMATIQUE IV :
CALCULABILITÉ ET INCOMPLÉTUDE

Guillaume Malod & Paul Rozière

PROGRAMME

Calculabilité : fonctions récursives et fonctions calculables par machine ; caractérisation logique des fonctions calculables ; théorème smn et théorèmes de point fixe ; notions de réduction et problèmes indécidables.

Introduction à la complexité : classes en temps et espace, théorèmes de hiérarchie, réductions, complétude, circuits booléens, introduction à la complexité algébrique.

Arithmétique formelle : axiomes de Peano et sous-systèmes faibles ; arithmétisation de la logique ; théorèmes d'indécidabilité ; les théorèmes d'incomplétude de Gödel.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.BARWISE (ed) : Handbook of Mathematical Logic (North-Holland, 1977-1999).
[2] R.CORI & D.LASCAR : Logique mathématique : cours et exercices (Dunod, 2 tomes, 2003).
[3] R.LASSAIGNE & M. de ROUGEMONT : Logique et Complexité (Hermès, 1996).
[4] M. MACHTEY & P. YOUNG : An introduction to the General Theory of Algorithms (North Holland, 1978).
[5] J.R. SCHOENFIELD : Mathematical Logic (Addison-Wesley, 1967. Assoc. for Symb. Logic, 2001).
[6] R.S MULLYAN : Les Théorèmes d'Incomplétude de Gödel (Masson, 1993).
[7] O. GOLDREICH : Computational Complexity : A Conceptual Perspective (Cambridge University Press, 2008).
[8] N.D. JONES : Computability and Complexity : From a Programming Perspective (MIT Press, 1997).

THÉORIE DES MODÈLES : OUTILS CLASSIQUES

Tamara Servi

Nous supposerons connues les notions de théorie des modèles du cours du premier semestre. Des notions que l'on apprend typiquement au cours de la licence de mathématiques pourront être utiles pour comprendre les exemples et les applications.

PROGRAMME

(1) Outils de base (rappels et raccord avec le cours du premier semestre)
(2) Prégéométries
(3) Imaginaires
(4) Indiscernables
(5) Rang de Morley
(6) Applications et exemples

BIBLIOGRAPHIE

[1] Hodges, W., Model theory, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 42, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[2] Marcja, A., Toffalori, C., A guide to classical and modern model theory, Trends in Logic Vol. 19, Springer, 2003.

[3] Marker, D., Model theory, An introduction, Graduate Texts in Mathematics, 217, Springer-Verlag, New York, 2002.

[4] Poizat B., Cours de théorie des modèles, 1985, Nur Al-Mantiq Wal-Ma'rifah. [Version anglaise éditée chez Springer en 2000].

[5] Tent K., Ziegler M., A course in Model Theory, Lecture Notes in Logic, Cambridge University Press, 2012.

THÉORIE DES MODÈLES DES CORPS PSEUDO-FINIS

Sylvain Rideau

L'étude des propriétés asymptotiques des corps finis, c'est à dire les propriétés varies dans tous les corps finis suffisamment grands, se fait naturellement par le biais des corps dits pseudo-finis : les modèles infinis de l'ensemble des énoncés vrais dans tous corps finis. Cette classe a été définie et étudiées par Ax et il en a donné une caractérisation algébrique : ce sont les corps parfaits, pseudo-algébriquement clos qui ont exactement une extension de chaque de degré.
Les structures pseudo-finies ont plus récemment joué un rôle déterminant dans l'approche, par la théorie des modèles, de certaines questions combinatoires, entre autre dans les travaux de Hrushovski en combinatoire additive. Ces derniers trouvent une partie de leurs racines dans les résultats de Chatzidakis, van den Dries et Macintyre qui ont donné une description fine des ensembles définissables dans les corps pseudo-finis en exhibant, entre autre, un équivalent pseudo-fini de la mesure de comptage. Le but de ce cours sera d'introduire les résultats d'Ax et de Chatzidakis-van den Dries-Macintyre ainsi que les notions algébriques nécessaires à leur compréhension. Enfin, on abordera dans la mesure du possible, des questions liées à la théorie géométrique des modèles comme l'étude des groupes définissables ou des imaginaires ainsi que des questions de classification.

Programme

- Rappels d'algèbre : théorie de Galois, corps finis, bases de géométrie algébrique.
- Etude des corps pseudo-algébriquement clos (bornés) : modèle complétude, description des types.
- Théorème d'Ax : aperçu des théorèmes de Lang-Weil et Tchebotarev.
- Théorème de Chatzidakis - van den Dries – Macintyre : existence et définissabilité de la dimension et des mesures pseudo-finies.
- Classification : théorie simples, propriété de l'indépendance.
- Imaginaires dans le corps pseudo-algébriquement clos bornés.
- Groupes définissables : configuration de groupe, groupes algébriques.

BIBLIOGRAPHIE

[Ax68] J. Ax.The elementary theory of finite fields. Ann. of Math. (2) 88 (1968), pp.239-271.

[Cha96] Z. Chatzidakis. Théorie des modèles des corps finis et pseudo-finis. Cours de M2.1996.

[CDM92] Z. Chatzidakis. L. van den Dries, and A. Macintyre. Definable sets over finite fields. J. Reine Angew. Math. 427 (1992), pp.107-135.

[FJ08] M. D. Fried and M. Jarden. Field arithmetic. Third. Vol. 11. Ergeb. Math. Grenzgeb. (3). Revised by Jarden. Springer-Verlag, Berlin, 2008, pp. xxiv+792.

[Hru02] E. Hrushovski. Pseudo-finite fields and related structures. In : Model theory and applications. Vol. 11. Quad. Mat. Aracne, Rome, 2002, pp. 151-212.

THÉORIE DES ENSEMBLES : OUTILS CLASSIQUES

Boban VELICKOVIC

Le 8 août 1900, lors du second Congrès International des mathématiciens, à Paris, David Hilbert énonça une liste de 23 problèmes mathématiques qui, selon lui, devaient servir de guide pour les recherches à venir dans le nouveau siècle. Le premier problème de cette liste, l'hypothèse du continu de Cantor, a été résolu, en deux temps : par Gödel (1938) qui construisit un modèle interne de l'hypothèse généralisée du continu, et par Paul Cohen (1963), qui a inventé une construction de modèle pour la négation de l'hypothèse de Cantor. Ce cours couvrira principalement les deux constructions de modèles de la théorie des ensembles introduites par Gödel et Cohen.

PROGRAMME

- Rappel sur les base de la théorie des ensembles : cardinaux, ordinaux, ordres, algèbres de Boole, etc.
- arbres et théorie de Ramsey
- modèles de ZFC, réflexion, relativisations, ensembles définissables en terme d'ordinaux
- l'univers constructible ***L*** de Gödel, la cohérence de l'Axiome du Choix et l'Hypothèse du Continu
- notion de forcing et extensions génériques, théorème fondamental du forcing
- applications du forcing : le principe 'diamant', arbres de Souslin, Kurepa, etc.
- itération de forcing, l'axiome de Martin et applications.

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. JECH : Set Theory (Springer Verlag, 2002)
[2] P. DEHORNOY, La théorie des ensembles (Calvage et Mounet 2017)
[3] K. KUNEN : Set Theory (Studies in Logic : Mathematical Logic and Foundations, Vol. 34, College Publications, London, 2011)
[4] N. WEAVER, Forcing for mathematicians (World Scientific 2014)

THÉORIE DESCRIPTIVE DES ENSEMBLES

Dominique Lecomte

En théorie descriptive des ensembles classique, on s'intéresse aux ensembles apparaissant naturellement dans divers domaines des mathématiques, notamment l'analyse fonctionnelle, l'analyse harmonique, les systèmes dynamiques ou encore la théorie des groupes. Un des objectifs est d'étudier leur complexité topologique. Par exemple, on peut classifier les sous-ensembles boréliens des réels selon le nombre d'étapes qui sont nécessaires pour les obtenir à partir d'ensembles ouverts en effectuant des unions dénombrables et des passages au complémentaire.

Le cadre général est celui des espaces topologiques polonais, où le théorème de Baire est un outil puissant. On s'intéressera d'abord aux sous-ensembles boréliens des espaces polonais, dont on verra qu'ils sont naturellement hiérarchisés par les ordinaux dénombrables. Ensuite viennent les images via une application borélienne de boréliens (ensembles analytiques) et leurs complémentaires (ensembles co-analytiques). On verra notamment une méthode permettant de montrer qu'un ensemble est co-analytique mais non borélien.

Le cours se terminera par une introduction à la théorie descriptive effective des ensembles et à ses applications. Un de ses outils très puissants est la topologie de Gandy-Harrington, et nous établirons ses propriétés permettant son utilisation dans la preuve de nombreux résultats de dichotomie. Nous détaillerons trois exemples, les dichotomies d'Hurewicz, Silver et Kechris-Solecki-Todorčević. Nous énoncerons d'autres exemples plus récents, en détaillant suivant le temps disponible.

PROGRAMME

- Topologie générale
- Espaces polonais
- Les espaces de Cantor et de Baire
- Catégorie de Baire
- Ensembles boréliens et fonctions boréliennes
- - Ensembles analytiques et co-analytiques
- Théorie descriptive effective des ensembles
- Application aux dichotomies

BIBLIOGRAPHIE

[G] S. Gao, Invariant Descriptive Set Theory, Pure and Applied Mathematics, A Series of Mono- graphs and Textbooks, 293, Taylor and Francis Group, 2009

[K] A. S. Kechris, Classical Descriptive Set Theory, Springer-Verlag, 1995

[K-S-T] A. S. Kechris, S. Solecki and S. Todorčević , Borel chromatic numbers, Adv. Math. 141 (1999), 1-44

[M] Y. N. Moschovakis, Descriptive set theory, North-Holland, 1980

PREUVES ET PROGRAMMES : OUTILS CLASSIQUES

Alexis Saurin & Christine Tasson

La théorie de la démonstration a connu au moins deux évolutions majeures au cours du siècle dernier suite aux théorèmes d'incomplétude de Gödel. La première a eu lieu dans les années 30, immédiatement après les résultats d'incomplétude, avec l'introduction et l'étude de la déduction naturelle et du calcul des séquents par Gentzen et du lambda-calcul par Church. Church montrait alors l'indécidabilité du calcul des prédicats via le lambda-calcul tout en introduisant un modèle de calcul universel tandis que Gentzen déduisait la consistance de divers systèmes logiques comme corollaire de l'élimination des coupures en calcul des séquents.

La seconde étape a eu lieu dans les années 60 avec la mise en évidence progressive, par le biais de la correspondance de Curry-Howard, des liens profonds entre preuves et programmes, depuis la correspondance entre lambda-calcul simplement typé et déduction naturelle propositionnelle minimale jusqu'aux diverses extensions de cette correspondance au second ordre, à la logique classique et jusqu'à l'émergence de la notion de linéarité en théorie de la démonstration. La logique linéaire a profondément renouvelé les liens entre la sémantique formelle des langages de programmation d'un côté et la théorie de la démonstration de l'autre. L'algèbre linéaire s'impose comme troisième pôle de cette correspondance, en mettant au centre la notion de ressource du calcul.

Le cours fondamental a traité de la première étape. Ce cours sera consacré aux développements depuis les années 60 et présentera les outils classiques pour l'étude de la correspondance de Curry-Howard. Après quelques rappels et compléments du cours fondamental, le cours se concentrera sur deux concepts fondamentaux, le second-ordre et la linéarité, et à leurs développements, notamment dans un cadre algébrique. On appliquera notamment les résultats du cours à l'étude de PCF, un langage de programmation idéalisé.

PROGRAMME

- ***Introduction et compléments*** (rappels sur le lambda-calcul et la théorie de la démonstration).
- ***Trois exemples de calculs :*** lambda simplement typé, Système F (Logique et arithmétique du second-ordre, théorème de normalisation forte) et PCF.
- ***Logique linéaire :*** décomposition linéaire, calcul des séquents linéaire, réseaux de preuves et correction, élimination des coupures, traductions linéaires du lambda-calcul.
- ***Interprétation des preuves et des programmes :*** interprétations du lambda-calcul simplement typé et de PCF dans une catégorie cartésienne fermée (exemples de CCC, théorème d'adéquation), sémantique catégorique de LL et exemples de modèles (domaines de Scott, sémantique relationnelle, modèles vectoriels), interprétations interactives, théorèmes d'adéquation.
- ***Extensions de Curry-Howard :*** Curry-Howard pour la logique classique, extensions et variantes de la logique linéaire (logiques allégées, logiques différentielles, logiques avec points fixes, ...), PCF probabiliste (espaces cohérents probabilistes et complète adéquation pour PCF probabiliste)

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. AMADIO, P.-L. CURIEN : Domains and lambda-calculi (Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 46, Cambridge University Press, 1998).

[2] P.-L. CURIEN, H. HERBELIN, J.-L. KRIVINE, P.-A. MELLIES : Interactive Models of Computation and Program Behavior (Panorama et Synthèses, Société mathématique de France, 2009).

[3] R. DAVID, K. NOUR, C. RAFFALLI : Introduction à la logique Théorie de la démonstration (Sciences Sup, Dunod, 2004).

[4] J.-Y. GIRARD, Y. LAFONT, P. TAYLOR : Proofs and Types (Cambridge University Press, 1989, disponible sur la page de P. Taylor).

[5] R. HARPER : Practical Foundations for Programming languages (Camb Univ Press, 2012)

[6] J.-L. KRIVINE : Lambda-calcul : Types et Modèles (Masson, 1990, ou E. HORWOOD : Lambda-calculus : types and models version augmentée, en anglais, 1992).

[7] B.C. PIERCE : Types and Programming Languages (MIT Press, 2002).

THÉORIE DES TYPES HOMOTOPIQUES

Hugo HERBELIN & Nicolas TABAREAU

PROGRAMME

Théorie des types de base:

- Système de types purs
- Théorie des types de Martin-Löf
- Calcul des constructions inductives
- La correspondance preuve/programme
- Discernabilité et indiscernabilité des preuves
- Types inductifs et coinductifs
- Extensionalité en théorie des types

Théorie des types homotopique :

- La correspondance type/espace, égalité/chemin
- Concepts homotopiques en théorie des types (espaces contractibles, h-niveaux, univalence, systèmes de factorisation faibles, fibrations, cofibrations)
- Type inductifs supérieurs (sphères, quotients, troncations, ...)
- Axiome du choix et logique classique en théorie des types homotopique

Modèles :

- Catégories de famille
- Théorie des types cubique
- Traductions internes
- ω-groupoïdes
- Complexes de Kan

NB : ***La participation aux cours d'introduction à la programmation et la preuve formelle en Coq, ou la maîtrise des notions correspondantes, est un prérequis de ce cours***

BIBLIOGRAPHIE

[1] THE UNIVALENT FOUNDATIONS PROGRAM : Homotopy type theory : Univalent foundations of mathematics (Institute for Advanced Study, 2013).

COMPLEXITÉ ALGÉBRIQUE

Hervé FOURNIER & Guillaume MALOD

En complexité algébrique, on s'intéresse au nombre d'opérations arithmétiques nécessaires pour calculer un polynôme. L'un des problèmes importants dans ce domaine est d'obtenir des bornes inférieures pour le calcul du permanent d'une matrice : ceci peut être vu comme un équivalent de P vs NP dans le cadre du calcul de polynômes. On introduira les classes de Valiant et des techniques permettant d'obtenir des bornes inférieures sur des modèles simples.

PROGRAMME

- Calculs définis par des circuits arithmétiques, classes de Valiant.
- Rappels de complexité booléenne.
- La hiérarchie polynomiale, théorème de Karp-Lipton.
- Classes de comptage, complétude du permanent, théorème de Toda.
- Complexité du permanent et du déterminant sur les modèles algébriques.
- Parallelisation des circuits, borne de Baur et Strassen.
- Algebraic Branching Programs, caractérisation de la complexité par Nisan.
- Mesures basées sur les dérivées partielles, bornes de Nisan et Wigderson.
- Tests d'identité polynomiale. Construction pour les polynômes creux. Lien entre tests d'identité polynomiale et bornes inférieures.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Arora et B. Barak. Computational Complexity: A Modern Approach, Cambridge University Press, 2010.

[2] S. Perifel. Complexité algorithmique. Ellipses, 2014.

[3] A. Shpilka et A. Yehudayoff. Arithmetic Circuits: A survey of recent results and open questions. Foundations and Trends in Theoretical Computer Science 5(3-4): 207-388 (2010).

[4] R. Sapthrishi. A survey of lower bounds in arithmetic circuit complexity. https://github.com/dasarpmar/lowerbounds-survey/releases

CALCULABILITÉ ET COMPLEXITÉ EN ANALYSE

Olivier Bournez & Joris Van Der Hoeven

L'objectif de ce cours est de présenter des résultats fondamentaux et pratiques concernant la complexité et la calculabilité pour des problèmes en analyse.
On présentera plusieurs approches pour discuter la calculabilité et la complexité des calculs sur les réels : on introduira l'analyse calculable qui permet d'étendre le modèle de la machine de Turing aux structures comme les réels, et des modèles de calculs analogiques basés sur la programmation par équations différentielles.
On étudiera ensuite la complexité pratiques de plusieurs questions en analyse : évaluation rapide de fonctions, trouver le maximum d'une fonction, résoudre des équations différentielles et des systèmes polynomiaux, etc..

PROGRAMME

- Partie I par Olivier BOURNEZ
  - **Théorie descriptive des ensembles**. Hiérarchie de Borel : définitions de base, version effective : hiérarchie arithmétique et analytique, classification de différents problèmes dans ces hiérarchies.
  - **Analyse récursive**. Réels calculables, semi-calculables, naivement calculables, fonctions réelles calculables, ensembles fermés et ouverts calculables, calculabilité et continuité, calculabilité de la dérivée, du maximum ou des zéros d'une fonction.
  - **Calculs par équations différentielles**. Rappels sur existence et unicité des solutions, calculabilité des solutions, le modèle analogique du « General Purpose Analog Computer » de Shannon, fonctions générables par GPAC, fonctions calculables par GPAC, comparaison avec la calculabilité classique.

- Partie II par Joris VAN DER HOEVEN
  - **Analyse numérique en précision multiple**. Nombres flottants, norme IEEE, rappels de l'analyse numérique classique (algèbre linéaire, équations différentielles, FFT, différents types d'erreur, conditionnement), complexité des algorithmes classiques en précision multiple.
  - **Arithmétique de boules**. Relèvement d'une fonction en arithmétique de boules, opérations arithmétiques de base, comparaison avec arithmétique d'intervalles, interprétation de fonctions réelles calculables, surestimation, complexité et qualité versus efficacité.
  - **Arithmétique rapide**. Multiplication rapide d'entiers, de polynômes et de nombres flottants, puis application aux autres opérations (division, changement de base, etc.), calcul rapide avec des séries formelles et fonctions analytiques, certification des calculs.
  - **Exemples**. Évaluation rapide de fonctions holonômes, prolongement analytique effectif, résolution d'équations différentielles, résolution de systèmes polynomiaux.

BIBLIOGRAPHIE

1] O.Bournez et A.Pouly. A survey on analog models of computation.Technical Report https://arxiv.org/abs/1805.05729, Arxiv, 2018.
[2] V. Brattka, P. Hertling, et K. Weihrauch. New computational paradigms, chapitre A tutorial on computable analysis, pages 425–491. Springer, 2008.
[3] R. P. Brent et P. Zimmermann. Modern Computer Arithmetic. Cambridge University Press, 2010.
[4] J. van der Hoeven. Journées Nationales de Calcul Formel (2011), volume 2 de Les cours du CIRM, chapitre Calcul analytique. CEDRAM, 2011. Exp. No. 4, 85 pages, http://ccirm.cedram.org/ccirm-bin/fitem?id=CCIRM_2011__2_1_A4_0.
[5] A. Kechris. Classical descriptive set theory, volume 156 de Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2012.
[6] D. Marker. Descriptive set theory. http://homepages.math.uic.edu/~marker/math512/dst.pdf.
[7] R.E. Moore, R.B. Kearfott, et M.J. Cloud. Introduction to Interval Analysis. SIAM Press, 2009.
8] A. Pouly. Continuous models of computation: from computability to complexity . PhD thesis, Ecole Polytechnique and Unidersidade Do Algarve, 2015.
[9] K. Weihrauch. Computable analysis. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 2000.

Cours d'ouverture par Pierre LETOUZEY

PROGRAMMATION FONCTIONNELLE EN COQ

- Lambda-calcul, récursivité (et ses limites en Coq), typage à la ML
- Structures de données usuelles (booléens, entiers, listes, options, arbres, ...)
- Programmation générique : polymorphisme, modules, classes de type
- Types dépendants
- Lien avec d'autres langages comme OCaml, présentation des "absents" de Coq (exceptions, traits impératifs, entrées-sorties, ...), comment faire le lien entre OCaml et Coq

PREUVES FORMELLES EN COQ

- Langage de spécification, règles logiques de base
- Arithmétique, calcul, réécriture, récurrence
- Preuves de propriétés des structures de données usuelles
- Prédicats inductifs
- Automatisation
- Éventuellement: rapide tour d'horizon d'autres assistants de preuves et comparaison avec Coq

Une moitié des heures de ces modules consistera en des cours, l'autre en des TP sur machine. Ces cours se concluront par un projet à réaliser en Coq. Le contenu de ces cours est un prérequis pour le cours de théorie des types homotopiques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. David, K. Nour et C. Raffalli, Introduction à la logique : théorie de la démonstration, Dunod, Paris, 2001.

[2] Y. Bertot et P. Castéran, Interactive Theorem Proving and Program Development. Coq'Art : The Calculus of Inductive Constructions. Springer Verlag, 2004. http://www.labri.fr/perso/casteran/CoqArt

[3] F. Wiedijk ed., The Seventeen Provers of the World, LNCS vol. 3600, Springer Verlag, 2006. http://www.cs.ru.nl/~freek/comparison/comparison.pdf