université PARIS DIDEROT PARIS 7

2014
2015

Master 2 Logique Mathematique et Fondements de l'Informatique

Domaine : Sciences, Technologies, Santé
Mention : Mathématiques et Applications

Responsables pédagogiques :

Martin Hils & Alexis Saurin

http://www.math.univ-paris-diderot.fr/m2lmfi/

SOMMAIRE

Le M2 LMFI est le seul M2 français dédié à la logique mathématique et à ses applications à l'informatique. Il forme des logiciens de haut niveau et les prépare au doctorat, aux carrières universitaires, à l'enseignement et à des métiers de la R&D.

Cette formation, qui est l'une des spécialités du Master mention Mathématiques et Applications de l'Université Paris Diderot - Paris 7, est le fruit d'une longue tradition logique à Paris 7, notamment à travers le DEA de Logique de l'Université Paris 7.

Le M2 LMFI s'appuie sur deux laboratoires d'accueil prestigieux, de l'Université Paris-Diderot et du CNRS, couvrant la plupart des branches de la logique mathématique et informatique :

Équipe de logique mathématique de l'Institut de Mathématiques de Jussieu (IMJ)

UMR 7586 du CNRS – http://www.logique.jussieu.fr

Laboratoire Preuves, Programmes, Systèmes (PPS)

UMR 7126 du CNRS – http://www.pps.univ-paris-diderot.fr

<table>
<tr><th colspan="2">CONTACTS</th></tr>
<tr><th colspan="2">Responsables pédagogiques du M2 :</th></tr>
<tr><th>Martin Hils</th><th>Alexis Saurin</th></tr>
<tr><td>hils@math.univ-paris-diderot.fr</td><td>saurin@pps.univ-paris-diderot.fr</td></tr>
<tr><td colspan="2">Localisation : Site PRG (13^{ème}) Bâtiment Sophie Germain - 8 place FM/13 (en cours de nomination)
entrée au croisement de l'avenue de France et de la rue Alice-Domon et Léonie-Duquet</td></tr>
<tr><td>6^{ème} étage, bureau 6022 - 01 57 27 91 52</td><td>3^{ème} étage, bureau 3040 – 01 57 27 93 37</td></tr>
<tr><th colspan="2">Le secrétariat du M2 : Catherine PRUDLO</th></tr>
<tr><td colspan="2">catherine.prudlo@univ-paris-diderot.fr</td></tr>
<tr><td colspan="2">5^{ème} étage, bureau 5055 - 01 57 27 93 06</td></tr>
<tr><td colspan="2">Adresse postale : Université Paris Diderot – Paris 7
UFR de Mathématiques
Bâtiment Sophie Germain – Case 7012
75205 Paris cedex 13</td></tr>
<tr><th colspan="2">Site internet du M2 :
http://www.math.univ-paris-diderot.fr/m2lmfi</th></tr>
</table>

CONDITIONS D'ADMISSION

Le candidat devra avoir validé une 1ère année de Master (M1), une Maîtrise ou un titre équivalent. Cette première année devra avoir été effectuée dans une spécialité mathématique, informatique, ou logique (dans ce dernier cas, par exemple, dans le cadre d'un master de philosophie).

- **Candidature des étudiants étrangers :**
  Afin de faciliter la mobilité internationale, l'Université Paris Diderot adhère à l'Agence Campus France.
  Nous invitons les étudiants à se renseigner sur le site de Campus France (http://www.campusfrance.org/fr) et à s'inscrire auprès de cet organisme avant mars 2014.

- **Pour toutes les autres candidatures :** Les étudiants doivent déposer une demande de pré-inscription sur le site web : https://ecandidat.app.univ-paris-diderot.fr puis transmettre par voie postale le dossier de préinscription avec les pièces justificatives.
  Période de préinscription sur e-candidat :
  Du 5 avril 2014 au 23 juillet 2014.
  Du 26 août 2014 au 5 septembre 2014.
  Les dossiers de candidature envoyés avant le 4 juillet 2014 bénéficieront d'une réponse mi-juillet, les autres en septembre.

  Date limite de remise du dossier d'admission : 5 septembre 2014.

  Date limite d'inscription administrative : 15 octobre 2014.

Pour toute demande de renseignement complémentaire, vous pouvez consulter le site :
http://www.math.univ-paris-diderot.fr/m2lmfi/

ou vous adresser aux Responsables de la formation ou au secrétariat du master 2 (voir la rubrique contact).

ORGANISATION DU M2 LMFI

Offre d'enseignement du diplôme :

Le Master 2ème année LMFI propose

au premier semestre :

- **un cours préliminaire intensif de logique** (30h), facultatif
- **un tronc commun constitué de deux cours fondamentaux** (60h chacun)
- **les groupes de travail** des cours fondamentaux (36h chacun)

au second semestre :

- **des cours d'orientation** (48h chacun),
- **des cours d'ouverture** (24h chacun),
- **une initiation à la recherche sous forme d'un stage**

La liste et le programme des différents cours se trouvent en page 10 et suivantes.

Stage d'initiation à la recherche

Le stage de M2 du LMFI peut s'effectuer :

- soit dans un laboratoire universitaire, par exemple dans une des deux équipes d'accueil : l'équipe de Logique Mathématique ou le laboratoire Preuves, Programmes, Systèmes,
- soit dans un autre laboratoire de recherche, en France ou à l'étranger, après accord du responsable du M2.

Dans tous les cas, il est placé sous la responsabilité d'un enseignant du Master, tuteur du stage. Le travail de recherche, d'une durée d'au moins 3 mois, donne lieu à la rédaction d'un mémoire et à une soutenance devant un jury de stage.

Calendrier 2014–2015

- **1 au 12 septembre 2014 :** cours préliminaire intensif de logique
- **15 septembre au 5 décembre 2014 :** cours fondamental
- **début décembre :** réunion de présentation des cours du second semestre
- **8 au 12 décembre 2014 :** rattrapage des cours et révisions
- **15 au 19 décembre 2014 :** semaine d'examens du cours fondamental
- **20 décembre 2014 au 4 janvier 2015 :** vacances de fin d'année
- **5 janvier au 27 mars 2015 :** cours du second semestre
- **30 mars au 3 avril 2015 :** rattrapage des cours et révisions
- **7 au 17 avril 2015 :** semaine d'examens du second semestre
- **printemps et été 2015 :** stage d'initiation à la recherche

VALIDATION DU M2 LMFI

La validation de la 2ème année de Master correspond à l'acquisition de 60 crédits ECTS selon les modalités suivantes :

- Validation des deux cours fondamentaux (10 ECTS chacun).
- Validation de deux cours d'orientation (9 ECTS chacun).
- Validation de 6 ECTS d'ouverture, qui peuvent être obtenues, au choix :
  - par la validation de deux cours d'ouverture (24h et 3 ECTS chacun)
  - par la validation d'un troisième cours d'orientation
- Le stage est crédité de 16 ECTS.

Les cours d'orientation sont à choisir dans la liste proposée par le M2 (voir les cours spécialisés décrits dans la présente brochure) ou, après accord du responsable, parmi des unités d'un autre M2, par exemple dans le M2 Mathématiques Fondamentales ou dans le MPRI (Master Parisien de Recherche en Informatique).

L'attribution des ECTS correspondant à chacun des modules précédents est conditionnée par l'obtention, pour ce module, d'une note supérieure ou égale à 10. Cependant une compensation est possible entre les deux notes F_1 et F_2 des cours fondamentaux, sous réserve qu'elles soient toutes deux supérieures ou égales à 7 et que leur moyenne soit supérieure ou égale à 10.

Il est attribué une note finale du M2, qui est la moyenne entre $(F_1+F_2)/2$, O_1, O_2 et S, où O_1 et O_2 sont les notes obtenues aux cours d'orientation et S la note de stage.

Les notes obtenues éventuellement aux modules des cours d'ouverture n'interviennent donc pas dans la note finale, mais conditionnent l'obtention des crédits correspondants.

Le cours préliminaire de logique est facultatif mais fortement recommandé pour la validation du 1er semestre car il expose les pré-requis de logique.

Jury du Master

Le jury du M2 de Logique Mathématique et Fondements de l'Informatique est nommé en début d'année universitaire. Pour information, le jury était constitué comme suit pour l'année universitaire 2013-2014 :

CORI René,	Maître de Conférences à l'Université Paris Diderot - Paris 7
SAURIN Alexis,	Chargé de recherche CNRS
MEREL Loïc,	Professeur à l'Université Paris Diderot - Paris 7
DURAND Arnaud,	Professeur à l'Université Paris Diderot - Paris 7, Président
EHRHARD Thomas,	Directeur de Recherche CNRS
LABIB-SAMI Ramez,	Maître de Conférences à l'Université Paris Diderot - Paris 7
ROZIÈRE Paul,	Maître de Conférences à l'Université Paris Diderot - Paris 7, Vice-Président

INFORMATIONS PRATIQUES

Bourses et/ou logement en résidence universitaire

Le ministère chargé de l'Enseignement supérieur accorde aux étudiants, un certain nombre d'aides gérées par le Crous, en lien avec les universités : bourses sur critères sociaux, aide d'urgence annuelle, bourse de mérite, bourses de mobilité, passeport mobilité, prêts d'honneur, bourses de mérite...

Le guide du dossier social de l'étudiant est disponible à l'adresse :

http://www.univ-paris-diderot.fr/sc/site.php?bc=vie_etudiante&np=Aides

Pour de plus amples informations, vous devez prendre contact avec le CNOUS : http://www.cnous.fr

Restauration

Le campus de Paris Diderot dispose d'un restaurant universitaire.

Ressources pour les étudiants

Les étudiants du M2 ont accès à la bibliothèque de Mathématiques-Recherche (Bâtiment Sophie Germain, 8ème étage) ainsi qu'à quelques ouvrages mis à la disposition des étudiants par le M2.

Par ailleurs, le bâtiment Sophie Germain dispose de salles informatiques et de salles de travail en accès libre pour les étudiants.

Les laboratoires d'accueil du M2 sont également situés dans le bâtiment Sophie Germain et les étudiants du M2 sont encouragés à assister aux séminaires de recherche de ces laboratoires, au moins à partir du début du second semestre.

APRES LE M2 LMFI...

Débouchés

La suite naturelle de cette formation est la préparation d'un doctorat, soit en logique mathématique, soit en informatique. Pour un doctorat en informatique, la thèse peut éventuellement être préparée dans une entreprise ou un organisme public de recherche (INRIA, CEA…).

Les débouchés sont des postes d'enseignant-chercheur ou de chercheur :

- soit dans le milieu universitaire (français ou étranger) ou des organismes publics de recherche (CNRS, INRIA, CEA, ONERA, etc.).
- soit dans les services de recherche et développement d'entreprises du monde industriel (EDF, France Telecom, Siemens, EADS, etc.).

Les services de recherche et développement de ces entreprises sont particulièrement demandeurs d'étudiants ayant une forte compétence à la fois mathématique, logique et informatique, leur permettant d'encadrer des ingénieurs travaillant dans les domaines de la certification de logiciels, de la vérification de programmes et de protocoles, ainsi que de la sécurité informatique. Dans certains cas, le recrutement peut s'effectuer directement à l'issue du master 2$^{\text{ème}}$ année.

Le Doctorat

La durée conseillée des études doctorales est de trois ans. Une année supplémentaire peut être accordée après examen du dossier (comprenant un rapport du directeur de thèse prouvant l'avancement des travaux) et autorisation du directeur de thèse, du directeur de l'Ecole Doctorale, et du Président de l'Université. Le doctorat débute normalement en 6$^{\text{ème}}$ année des études universitaires et s'adresse aux étudiants titulaires d'un Master ou d'un diplôme de niveau équivalent.

Contrat doctoral. Il s'agit d'un contrat d'une durée de 3 ans.
L'Ecole Doctorale Sciences Mathématiques de Paris-Centre dispose d'un petit nombre de ces contrats pour les étudiants titulaires du Master et désireux de préparer une thèse de doctorat.
Rémunération (depuis le 1er juillet 2010) :

- **1684,93 euros bruts** si le doctorant contractuel effectue uniquement de la recherche.
- **2024,70 euros bruts** s'il effectue des activités complémentaires, par exemple de l'enseignement.

D'autres types de financements sont possibles : projets ANR, bourses INRIA, allocations de la région Île-de-France...

Conditions d'obtention du contrat doctoral. L'étudiant qui désire obtenir un contrat doctoral en vue de préparer une thèse doit faire acte de candidature auprès du responsable du M2 au cours de l'année universitaire.
Le jury du M2 établit un classement des dossiers (sur critères scientifiques). L'examen des dossiers a lieu pendant la deuxième quinzaine du mois de juin.
Les étudiants de nationalité étrangère, hors Communauté Européenne, sont invités à se renseigner sur les conditions exigées dans leur cas.

LISTE DES ENSEIGNEMENTS 2014-2015

1er SEMESTRE

Cours préliminaire intensif de logique *(M. H. Mourgues)*

Cours fondamentaux

- Cours fondamental I *(M. Hils)*
- Cours fondamental II *(H. Fournier & Thierry Joly)*

Groupes de travail sur les cours fondamentaux *(P. Simonetta, S. Boughattas & P. Rozière)*

2ème SEMESTRE

Cours d'orientation

- **Théorie des modèles :**
  Outils classiques (F. Point)
  Groupes et corps stables (A. Martin-Pizarro)
- **Théorie des ensembles :**
  Outils classiques (R. Labib-Sami)
  Théorie descriptive des ensembles (T. Tsankov)
- **Preuves et programmes :**
  Outils classiques (A. Saurin & C. Tasson)
  Preuves et programmes en logique classique (H. Herbelin & T. Ehrhard)
- **Calculabilité et complexité :**
  Théorie de la dualité en logique et informatique (M. Gehrke)
  Théorie des modèles finis et complexité descriptive (A. Durand)

Cours d'ouverture

- Modèles de la programmation (fonctionnelle, impérative, objet) (E. Chailloux)
- Initiation à la preuve formelle assistée par ordinateur (P. Letouzey)
- Les catégories : une méthodologie pour les mathématiques (A. Prouté)

COURS PRÉLIMINAIRE INTENSIF DE LOGIQUE

(Du 1 au 12 septembre 2014)

Marie Hélène MOURGUES

PROGRAMME

Calcul des propositions : tables de vérité, tautologies, formes normales, compacité.

Calcul des prédicats : langages du premier ordre, termes, formules, modèles ; satisfaction d'une formule dans un modèle ; sous-structures ; isomorphismes ; équivalence élémentaire.

Théorie des ensembles : axiomes de Zermelo-Frænkel ; cardinaux ; théorèmes de Cantor et de Cantor-Bernstein ; ensembles finis, ensembles dénombrables.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. CORI & D. LASCAR : *Logique mathématique : cours et exercices* (nouvelle édition, Dunod, 2 tomes, 2003, chapitres 1, 3, 7).

[2] P. HALMOS : *Introduction à la théorie des ensembles* (Gauthiers-Villars, 1967 ; reimpression : Jacques Gabay, 1997). Version originale : *Naïve Set Theory*, (Van Nostrand, 1960, dernière édition : Springer, 1998)

COURS FONDAMENTAL DE LOGIQUE MATHEMATIQUE I :

THÉORIE DES MODÈLES ET THÉORIE DES ENSEMBLES, INCOMPLÉTUDE

Martin HILS

PROGRAMME

Éléments de théorie des modèles :

- Compacité ; extensions élémentaires ; théorèmes de Löwenheim-Skolem
- méthode des diagrammes ; théorèmes de préservation ; élimination des quanteurs ; décidabilité de quelques théories axiomatiques
- ultraproduits ; théorème de Los
- espace des types ; omission des types ; ω-catégoricité ; théorème de Ryll-Nardzewski

Éléments de théorie des ensembles axiomatique :

- ordinaux ; récurrence transfinie ; axiome du choix et énoncés équivalents
- cardinaux ; arithmétique des cardinaux infinis
- axiome de fondation ; hiérarchie de von Neumann ; schéma de réflexion
- quelques résultats de cohérence relative

Incomplétude :

- arithmétique formelle : axiomes de Peano (faible) ; arithmétisation de la logique
- théorèmes d'indécidabilité ; premier théorème d'incomplétude de Gödel
- second théorème d'incomplétude de Gödel

BIBLIOGRAPHIE

[1] C.C. CHANG & H.J. KEISLER, Model Theory, North-Holland, 1990.

[2] R. CORI & D. LASCAR, Logique mathématique: cours et exercices, Dunod, 2 tomes, 2003.

[3] W. HODGES, Model Theory, Cambridge University Press, 1993.

[4] J.L. KRIVINE, Théorie des Ensembles, Cassini, 1998.

[5] K. KUNEN, Set Theory. An Introduction To Independence Proofs, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland, 1980. (Une version plus récente, légèrement changée, existe: Set Theory, Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations, College Publications, 2011.)

[6] B. POIZAT, Cours de Théorie des Modèles, Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, 1985, distribué par Offilib. (Il existe aussi une version anglaise: A course in Model Theory: An introduction to Contemporary Mathematical Logic, Springer Verlag, 2000.)

[7] J.R. SCHOENFIELD, Mathematical Logic, Addison-Wesley, 1967. (Reprint: A. K. Peters Ltd., Massachusetts, 2001.)

[8] K. Tent et M. Ziegler, A Course in Model Theory, Lecture Notes in Logic, Cambridge University Press, 2012.

COURS FONDAMENTAL DE LOGIQUE MATHEMATIQUE II :
THÉORIE DE LA DÉMONSTRATION, CALCULABILITÉ, COMPLEXITÉ

Hervé FOURNIER et Thierry JOLY

PROGRAMME

Théorie de la démonstration :

- Théorème de complétude par les témoins de Henkin pour la déduction naturelle et le calcul des séquents
- Déduction naturelle du premier ordre : Système NJ. Logique intuitionniste et son interprétation BHK. Élimination des coupures de NJ. Propriétés de la sous-formule et du témoin existentiel dans NJ, puis dans HA (arithmétique intuitionniste).
- Calcul des séquents du premier ordre : Calculs LJ et LK. Élimination des coupures et théorème du séquent médian. Théorème de Herbrand.
- Lambda-calcul. Propriétés de confluence et de standardisation. Représentation des fonctions récursives. Système T. Correspondance de Curry-Howard. Réalisabilité, correction des programmes et propriété de normalisation forte.

Calculabilité :

- Fonctions récursives et fonctions calculables par machine
- Caractérisation logique des fonctions calculables
- Théorème smn et théorèmes de point fixe
- Notions de réduction et problèmes indécidables

Complexité :

- Classes de complexité en temps ; théorème de hiérarchie
- Temps non-déterministe, classe NP, complétude du problème SAT (théorème de Cook-Levin)
- Classes en espace : hiérarchie ; lien entre espace déterministe et non-déterministe (théorème de Savitch) ; clôture par complément des classes non-déterministes (théorème d'Immerman Szelepcsényi)
- Hiérarchie polynomiale
- Comptage : complétude du permanent, théorème de Toda (le comptage est aussi difficile que la hiérarchie polynomiale)

BIBLIOGRAPHIE

[1] Sanjeev Arora, Boaz Barak. Computational Complexity: A Modern Approach. Cambridge, 2009.

[2] René Cori, Daniel Lascar. Logique mathématique, tome 1 et 2. Dunod, 2003.

[3] René David, Karim Nour, Christophe Raffalli. Introduction à la logique -- Théorie de la démonstration. Dunod, 2004.

[4] J.-L. KRIVINE : Lambda-calcul : Types et Modèles (Masson, 1990, ou E. HORWOOD : Lambda-calculus : types and models -- version augmentée, en anglais, 1992).

[5] Christos Papadimitriou. Computational Complexity. Addison-Wesley, 1994.

[6] Sylvain Perifel. Complexité algorithmique. Ellipses, 2014.

GROUPE DE TRAVAIL SUR LES COURS FONDAMENTAUX

Sedki BOUGHATTAS, Paul ROZIERE & Patrick SIMONETTA

Ces séances seront animées essentiellement par les étudiants eux-mêmes. L'objectif est double. Il s'agit d'une part de permettre aux participants, par la résolution d'exercices et problèmes, de s'assurer d'une bonne compréhension du cours. D'autre part, les étudiants auront l'occasion de s'astreindre à rédiger soigneusement et s'exerceront à faire des exposés oraux devant leurs collègues.

Etant donné le volume horaire, il est évident que seule une partie du programme pourra être couverte dans ce groupe de travail.

THÉORIE DES MODÈLES : OUTILS CLASSIQUES

Françoise POINT

Ce cours supposera connues les notions de théorie des modèles et de théorie des ensembles (ordinaux, cardinaux) du cours fondamental 1. Nous ferons attention à ce qu'il puisse être suivi soit indépendamment soit en parallèle au cours sur les groupes et corps stables d'Amador Martin-Pizarro.

PROGRAMME

(1) Constructions de Fraïssé (e.g. le graphe aléatoire).
(2) Modèles saturés.
(3) Théories et formules stables, héritiers et co-héritiers.
(4) Modèles d'Ehrenfeucht-Mostowski (théorème de Ramsey, suite d'indiscernables), suites de Morley.
(5) Paires de Vaught, ensembles fortement minimaux, prégéométries.
(6) Rang de Morley, rang de Cantor-Bendixon.
(7) Théorème de catégoricité de Morley.
(8) Théories sans la propriété de l'indépendance, illustration dans les théories o-minimales.
(9) Mesures de Keisler, groupes f.s.g.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B Buechler S., Essential Stability Theory, Springer, 1996.

[2] Hodges, W., Model theory, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 42, Cambridge University Press, Cambridge, 1993. xiv+772 pp.

[3] Jacobson, N., Basic Algebra 2, W.H. Freeman and Compagny, San Francisco, 1980.

[4] Marker, D., Model theory, An introduction, Graduate Texts in Mathematics, 217, Springer-Verlag, New York, 2002. viii+342 pp.

[5] Pillay A., An introduction to stability theory, Clarendon Press, Oxford, 1983. [Autre édition : édition Dover].

[6] Poizat B., Cours de théorie des modèles, 1985, Nur Al-Mantiq Wal-Ma'rifah. [Version anglaise éditée chez Springer en 2000.]

[7] Simon, P., Lecture notes on NIP theories, august 2012, arXiv:1208.3944v1.

THÉORIES DES MODÈLES : GROUPES ET CORPS STABLES

Amador MARTIN-PIZARRO

L'objectif de ce cours est d'introduire des techniques classiques en théorie des modèles géométriques dans l'étude des groupes stables, comme les propriétés des génériques, ainsi que d'illustrer comment ces techniques s'appliquent, particulièrement dans le cas ω-stable : théorème d'indécomposables, composantes connexes et analyse de Hrushovski, parmi d'autres.
Ce cours est une continuation naturelle du cours Théorie des modèles : les outils classiques. Cependant, les notions de stabilité requises seront introduites dans la première partie (environ un tiers du cours), quoique dans ledit cours elles seront traitées de façon plus détaillée.
Dans la deuxième partie du cours, on finira avec l'étude des groupes ω-stables et, en particulier, des résultats autour de groupes de rang de Morley petit.

PROGRAMME

Eléments de stabilité [20h]
1. Rappel de stabilité : Théorème de Morley, indiscernables, ensembles fortement minimaux, RM.
2. Héritiers, cohéritiers et définissabilité des types.
3. Déviation et propriétés.
4. Bases canoniques et élimination d'imaginaires.

Groupes ω-stables [16h]
1. Conditions de chaîne et composantes connexes.
2. Génériques.
3. Théorème d'indécomposables.
4. Analyse de Hrushovski.

Corps ω-stables [12h]
1. Corps de RM fini et Théorème de Macintyre.
2. Groupes minimaux.
3. Groupes de RM petit.

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. Tent et M. Ziegler, A course in model theory, Lecture Notes in Logic 40, ASL, Cambridge University Press, Cambridge, 2012. x+248 pp. ISBN : 978-0-521-76324-0

[2] B. Poizat, Groupes stables : Une tentative de conciliation entre la géométrie algébrique et la logique mathématique, Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah 2, Bruno Poizat, Lyon, 1987. vi+218 pp. ISBN : 2-9500919-1-1

[3] A. Pillay, An introduction to stability theory, Oxford Logic Guides 8, Oxford University Press, New York, 1983. xii+146 pp. ISBN : 0-19-853186-9 (Republished by Dover)

[4] A. Pillay, Geometric stability theory, Oxford Logic Guides 32, Oxford University Press, New York, 1996. x+361 pp. ISBN : 0-19-853437-X

THÉORIE DES ENSEMBLES : OUTILS CLASSIQUES

Ramez LABIB-SAMI

Le 8 août 1900, lors du second Congrès International des mathématiques, à Paris, David Hilbert énonça une liste de 23 problèmes mathématiques qui, selon lui, devaient servir de guide pour les recherches à venir dans le nouveau siècle. Le premier problème de cette liste, l'hypothèse du continu de Cantor, a été résolu, en deux temps : par Gödel (1938) qui construisit un modèle interne de l'hypothèse généralisée du continu, et par Paul Cohen (1963), qui a inventé une construction de modèle pour la négation de l'hypothèse de Cantor.

PROGRAMME

Ce cours couvrira principalement les deux constructions de modèles de la théorie des ensembles introduites par Gödel et Cohen :

Modèles internes : principalement, les ensembles constructibles de Gödel, cohérence de l'axiome du choix et de l'hypothèse généralisée du continu, quelques conséquenses de l'axiome de constructibilité.

Forcing : constructions de base ; modèles pour l'indépendance de l'hypothèse du continu, de l'axiome du choix ; modèle de Lévy-Solovay.

BIBLIOGRAPHIE

[1] T.JECH : Set Theory (Springer Verlag, 2002).

[2] J.-L. KRIVINE : Theorie des ensembles (Cassini, 1998).

[3] K. KUNEN : Set Theory (North-Holland, 1983).

[4] A. LEVY : Basic Set Theory (Springer Verlag, 1979).

[5] Y. N. MOSCHOVAKIS : Descriptive Set Theory (North-Holland, 1980).

THÉORIE DESCRIPTIVE DES ENSEMBLES ET SYSTEMES DYNAMIQUES

Todor TSANKOV

La théorie descriptive des ensembles est une des branches principales de la théorie des ensembles moderne. Elle étudie les ensembles « définissables » dans les espaces polonais (par exemple les réels). Les ensembles sont classifiés dans des hiérarchies selon la complexité de leurs définitions : la hiérarchie borélienne, la hiérarchie projective, etc. En général ce sont les ensembles qui apparaissent naturellement en mathématiques et qui ont plusieurs bonnes propriétés : ils satisfont l'hypothèse du continu, ont la propriété de Baire, sont universellement mesurables, etc.

Pendant les dernières années la théorie des relations d'équivalence définissables (et particulièrement celles engendrées par des actions de groupes polonais) s'est distinguée comme une des branches principales du domaine et a établi des liens importants avec d'autres parties des mathématiques comme l'analyse fonctionnelle et la théorie ergodique.

PROGRAMME

- Espaces polonais
- La tribu borélienne
- Ensembles analytiques et co-analytiques
- Le lemme de Baire et applications
- Groupes polonais : théorie de base et exemples
- Relations d'équivalence définissables
- Relations d'équivalence orbitales d'actions boréliennes de groupes polonais
- Théorème d'Effros ; dichotomie de Glimm—Effros
- Résultats de non-classification

BIBLIOGRAPHIE

[1] Kechris, A. S. Classical descriptive set theory. Graduate Texts in Mathematics, 156. Springer-Verlag

[2] Srivastava, S. M. A course on Borel sets. Graduate Texts in Mathematics,180. Springer-Verlag

[3] Hjorth, G. Classification and orbit equivalence relations. Mathematical Surveys and Monographs, 75. American Mathematical Society

PREUVES ET PROGRAMMES : OUTILS CLASSIQUES

Alexis SAURIN & Christine TASSON

La théorie de la démonstration a connu au moins deux évolutions majeures au cours du siècle dernier suite aux théorèmes d'incomplétude de Gödel. La première a eu lieu dans les années 30, immédiatement après les résultats d'incomplétude, avec l'introduction et l'étude de la déduction naturelle et du calcul des séquents par Gentzen et du lambda-calcul par Church. Church montrait alors l'indécidabilité du calcul des prédicats via le lambda-calcul tout en introduisant un modèle de calcul universel tandis que Gentzen déduisait la consistance de divers systèmes logiques comme corollaire de l'élimination des coupures en calcul des séquents.

La seconde étape a eu lieu dans les années 60 avec la mise en évidence progressive, par le biais de la correspondance de Curry-Howard, des liens profonds entre preuves et programmes, depuis la correspondance entre lambda-calcul simplement typé et déduction naturelle propositionnelle minimale jusqu'aux diverses extensions de cette correspondance au second ordre, à la logique classique et jusqu'à l'émergence de la notion de linéarité en théorie de la démonstration. La logique linéaire a profondément renouvelé les liens entre théorie de la démonstration et théorie de la programmation, conduisant à ce qu'on peut aujourd'hui appeler la «logique de programmation».

Le cours fondamental a traité de la première étape. Ce cours sera consacré aux développements depuis les années 60 et présentera les outils classiques pour l'étude de la correspondance de Curry-Howard. Après quelques rappels et compléments du cours fondamental, le cours se concentrera sur deux concepts fondamentaux, le second-ordre et la linéarité, et à leurs développements en logique de la programmation. On appliquera notamment les résultats du cours à l'étude de PCF, un langage de programmation idéalisé.

PROGRAMME

- Introduction et compléments (rappels sur le lambda-calcul et la théorie de la démonstration, interprétation du lambda-calcul simplement typé dans une catégorie cartésienne fermée)
- Second-ordre (Système F, Logique et arithmétique du second-ordre, théorème de normalisation forte, interprétation du système F dans les espaces cohérents et décomposition linéaire)
- Logique linéaire (calcul des séquents linéaire, réseaux de preuves et correction, élimination des coupures, sémantique catégorique de LL, traductions linéaires du lambda-calcul, focalisation et polarisation, logiques allégées et complexité, interprétations interactives)
- PCF (syntaxe et sémantique, le problème de la complète adéquation, sémantique des jeux)

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. AMADIO, P.-L. CURIEN : Domains and lambda-calculi (Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 46, Cambridge University Press, 1998).

[2] P.-L. CURIEN, H. HERBELIN, J.-L. KRIVINE, P.-A. MELLIES : Interactive Models of Computation and Program Behavior (Panorama et Synthèses, Société mathématique de France, 2009).

[3] R. DAVID, K. NOUR, C. RAFFALLI : Introduction à la logique -- Théorie de la démonstration (Sciences Sup, Dunod, 2004).

[4] J.-Y. GIRARD, Y. LAFONT & P. TAYLOR : Proofs and Types (Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 7, Cambridge University Press, 1989, disponible sur la page de P. Taylor).

[5] J.-Y. GIRARD: Le Point Aveugle -- Cours de logique, Tomes 1 & 2 (Collection Visions des Sciences, Hermann, 2006-2007).

[6] J.-L. KRIVINE : Lambda-calcul : Types et Modèles (Masson, 1990, ou E. HORWOOD : Lambda-calculus : types and models -- version augmentée, en anglais, 1992).

[7] B.C. PIERCE : Types and Programming Languages (MIT Press, 2002).

PREUVES ET PROGRAMMES EN LOGIQUE CLASSIQUE

Hugo HERBELIN & Thomas EHRHARD

La correspondance dite de Curry-Howard souligne que les preuves ont la même structure qu'un programme, fournissant une incarnation calculatoire au théorème d'élimination des coupures de Gentzen. Longtemps cantonnée au cas de la logique intuitionniste, dans la foulée du slogan de Brouwer qu'une preuve devrait être vue comme un processus de construction, cette correspondance a été étendue au cas de la logique classique au début des années 90. Ce cours posera les bases techniques des recherches actuelles visant à étendre la correspondance preuve-programme encore quelques crans plus loin. On abordera tout autant le style direct (une preuve calcule) que l'approche par réalisabilité (une preuve se découple en un programme et une preuve de correction de ce programme).

PROGRAMME

La correspondance preuve-programme pour la logique classique

- Opérateurs de contrôle (call-cc, abort, C, ...) et axiomes classiques (loi de Peirce, tiers-exclu, ...)
- Lambda-calculs pour la logique classique : lambda-mu-calcul et déduction naturelle classique, système mu-mu-tilde et LKtq
- Sémantiques opérationnelles de la logique classique : appel par nom et LKT, appel par valeur et LKQ
- L'interprétation de la logique classique en logique intuitionniste et ses limites : polarisation, traductions par double négation et par passage de continuation, quantification existentielle forte
- Modèles catégoriques de la logique classique calculatoire

Réalisabilité intuitionniste et classique

- Réalisabilité de Kleene
- Réalisabilité modifiée de Kreisel
- Interprétation fonctionnelle de Gödel
- Internalisation de la réalisabilité (indépendance des prémisses, principe de Markov, axiome du choix intensionnel)
- Réalisabilité classique de Krivine
- Modèles catégoriques de la réalisabilité

Extensions de l'interprétation calculatoire de la logique classique

- Délimiteurs de contrôle et A-traduction de Friedman
- Affectation mémoire et forcing
- Application au contenu calculatoire des théorèmes de complétude des calculs des prédicats intuitionniste et classique

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.Y. GIRARD, Y. LAFONT & P. TAYLOR : Proofs and Types (Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 7, Cambridge University Press, 1989).

[2] J.Y. GIRARD : Le Point Aveugle (Cours de Logique, Tomes 1 & 2, Collection Visions des Sciences, Hermann, 2006-2007).

[3] U. KOHLENBACH : Applied Proof Theory: Proof Interpretations and their Use in Mathematics (Springer Monographs in Mathematics, 2008).

[4] J.-L. KRIVINE : Lambda-calcul, types et modèles (Masson, 1990).

[5] M. SØRENSEN, P. URZYCZYN : Lectures on the Curry-Howard Isomorphism (Volume 149, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 2006).

CALCULABILITEÉ ET COMPLEXITÉ : THÉORIE DE LA DUALITÉ EN LOGIQUE ET INFORMATIQUE

Mai GEHRKE

La dualité de Stone montre que la catégorie des algèbres de Boole avec leurs homomorphismes est équivalente à l'opposée de celle des espaces compacts qui possèdent une base d'ouverts-fermés. Le fait que ce soit une équivalence entre une catégorie et l'opposée d'une autre signifie que les sous-objets d'un coté correspondent aux quotients de l'autre et que les produits d'un coté correspondent aux coproduits (ou sommes) de l'autre. Cela donne aux dualités leurs puissance toute particulière (voir http://www.liafa.univ-paris-diderot.fr/~mgehrke/oratie.pdf, sections 2 et 3, pour une introduction non technique à la dualité).
La dualité de Stone et ses variantes et ses extensions donnent le lien entre l'approche syntaxique par la déduction et la sémantique en logique. En informatique théorique cette dualité est centrale car les deux cotés correspondent aux langages de spécification et aux espaces des états des systèmes calculatoires, respectivement. Plus récemment, il s'avère aussi que la dualité de Stone est le mécanisme sous-jacent de la théorie d'Eilenberg-Reiterman qui lie les classes de langages formels réguliers aux classes de sémigroupes.

PROGRAMME

I Préliminaires
- Ensembles ordonnés, dcpos, et treillis ;
- Eléments de la topologie générale ;

II La dualité de Stone
- La dualité de Stone/Priestley pour les algèbres de Boole et les treillis distributifs ;
- La dualité entre les espaces sobres et les cadres spatiaux ;
- Bases, treillis à proximités, et le lien entre les dualités ci-dessus ;
- Dualité pour les opérations algébriques

III Application à la complétude
- Complétude de la logique du premier ordre par la dualité et le théorème de Baire ;
- Complétude par rapport à la sémantique de Kripke de la logique propositionnelle intuitionniste (et modale) par la dualité d'Esakia ;

IV Applications à l'informatique
- Modèles du lambda calcul et les solutions des équations de domaines;
- La Théorie d'Eilenberg-Reiterman pour langages formels et automates.

Références

[1] Brian Davey et Hilary Pristley, Introduction to lattices and order, Cambridge University Press 2002.

[2] Kazimierz Kuratowski, Topologie I, 1958 (voir http://www.gabay-editeur.com/KURATOWSKI-Topologie-I-et-II-t-I-4e-ed-1958-et-t-II-3e-ed-1961).

[3] Peter T. Johnstone, Stone spaces, Cambridge University Press (Cambridge Studies in Advanced Mathematics) 1986.

[4] Pierre-Louis Curien et Roberto M. Amadio, Domains and Lambda-Calculi, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 2008.

[5] Jorge Almeida, Finite Semigroups and Universal Algebra, World Scienti_c, Singapore, 1995.

CALCULABILITÉ ET COMPLEXITÉ :

THÉORIE DES MODÈLES FINIS ET COMPLEXITÉ DESCRIPTIVE

Arnaud DURAND

La théorie des modèles restreintes aux structures finies est née dans les années 70 et a connu un essor important en grande partie pour les liens forts qu'elle entretient avec la théorie de la complexité ou avec des domaines de l'informatique comme la théorie des bases de données, les contraintes, les jeux etc.
Dans ce cours, on présentera une introduction à cette discipline (définissabilité sur les structures finies, jeux, théorèmes de préservations,…) ainsi que les résultats classiques de complexité descriptive (caractérisation de classes de complexité, complexité de Datalog).

Le cours s'intéressera ensuite à la complexité des problèmes de model-checking (i.e. déterminer si une structure finie satisfait une formule donnée), de comptage ou d'énumération que l'on étudiera à travers différentes techniques notamment modèle-théoriques (application du théorème de Feferman-Vaught, par exemple).

PROGRAMME

1. Complexité descriptive : rappel de complexité, logique existentielle du second ordre (ESO) et NP, logique à point fixes et caractérisation du temps polynomial, classes au dessus de NP.
2. Logique du premier ordre (FO) et modèles finis : Jeux d'Ehrenfeucht-Fraïssé et types, non définissabilité, extension à la logique monadique du second ordre (MSO)
3. Model-checking de FO et MSO : requêtes conjonctives et satisfaction de contraintes (CSP), FO sur les graphes de degré bornés et extension, théorème de Feferman-Vaught, applications à la complexité de MSO sur les graphes de largeurs arborescentes bornées.
4. Au delà du model-checking : complexité des requêtes d'agrégats et d'énumération de solutions
5. Théorèmes de préservation : résultats classiques de théorie des modèles, théorèmes de préservation sur les modèles finis, application à la classification de la complexité.
6. Datalog : introduction et exemples, liens avec les jeux à k-jetons, résultats d'inexpressivité et de complexité

BIBLIOGRAPHIE

[1] Wilfrid Hodges, A shorter model theory, Cambridge University Press, 1997

[2] Neil Immerman, Descriptive Complexity, Springer, 1999

[3] Leonid Libkin, Elements of finite model theory, Springer, 2004

MODÈLES DE LA PROGRAMMATION

Emmanuel CHAILLOUX

Ce cours propose une mise à niveau en programmation à travers divers styles de conception et d'écriture des programmes : fonctionnel, impératif et objet.

Le cours s'appuiera sur le langage O'Caml autorisant les trois styles évoqués. Il sera accompagné de séances de travaux dirigés en salle machine.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. CHAILLOUX, P. MANOURY & B. PAGANO : *Développement d'applications avec Objective Caml* (O'Reilly, 2000).

[2] G. COUSINEAU & M. MAUNY : *Approche fonctionnelle de la programmation* (Ediscience, 1995).

[3] C.A. GUNTER : *Semantics of Programming Languages : structures and techniques. Foundations of Computing* (MIT Press, 1992).

[4] X. LEROY (with D. Remy, J. Vouillon and D. Doligez) : *The Objective Caml System* (Documentation and user's guide, release 2.02, http://caml.inria.fr/ocaml).

[5] P. WEIS & X. LEROY : *Le Langage Caml* (Inter Edition, 1993).

INITIATION A LA PREUVE FORMELLE ASSISTÉE PAR ORDINATEUR

Pierre Letouzey

Depuis plusieurs années, la preuve formelle sur machine se développe.
De nombreux systèmes existent maintenant, tels que Coq, Isabelle, HOL, Mizar, Agda, et bien d'autres encore. Ce cours débutera par un tour d'horizon de ces différents systèmes et de leurs fondements logiques, avant d'étudier plus en détail le fonctionnement de Coq. Les séances pratiques permettront une prise en main de Coq, puis la réalisation de preuves formelles de résultats mathématiques (non-triviaux).
Selon le temps disponible, on pourra éventuellement aborder la certification de petits programmes ML.
Le cours alternera cours magistraux et travaux dirigés en salle machine et se conclura par un projet à réaliser en Coq.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. David, K. Nour et C. Raffalli, Introduction à la logique : théorie de la démonstration, Dunod, Paris, 2001.

[2] Y. Bertot et P. Castéran, Interactive Theorem Proving and Program Development. Coq'Art : The Calculus of Inductive Constructions. Texts in Theoretical Computer Science. Springer Verlag, 2004. http://www.labri.fr/perso/casteran/CoqArt

[3] F. Wiedijk ed., The Seventeen Provers of the World, LNCS vol. 3600, Springer Verlag, 2006. http://www.cs.ru.nl/~freek/comparison/comparison.pdf

LES CATÉGORIES : UNE MÉTHODOLOGIE POUR LES MATHÉMATIQUES

Alain PROUTE

Ce cours expose les concepts fondamentaux de la théorie des catégories, en insistant sur leur utilisation dans différentes branches des mathématiques (en particulier en algèbre, en topologie algébrique, en géométrie et en logique, mais aussi en informatique). Les exemples y jouent donc un rôle important.

Les catégories apportent au moins deux avantages importants. D'abord, par leur grand degré de généralité, elles unifient des concepts qui peuvent paraître sans rapport entre eux, mettant ainsi leur structure en évidence de manière plus profonde que ce qu'on peut percevoir habituellement. Par ailleurs, elles offrent souvent des raccourcis surprenants, divisant la longueur des démonstrations par des facteurs très importants.

C'est leur caractère behavioriste, c'est-à-dire le fait qu'elles s'intéressent plus au « comment cela se comporte » qu'au « comment c'est construit », qui induit ces caractéristiques. On peut donc les voir comme une manière de penser, comme une méthodologie et même comme une philosophie.

Les principaux concepts avec lesquels on espère familiariser les étudiants sont ceux de foncteurs adjoints, de classifiant, de monade et de topos. Sur ces deux derniers sujets, certains théorèmes devront être admis faute de temps, mais l'objectif du cours n'est pas de faire un exposé exhaustifs mais bien d'inciter les étudiants à prendre l'habitude d'utiliser les méthodes catégoriques quelle que soit la discipline dans laquelle ils comptent travailler.

La référence principale est le cours de logique catégorique de 2010 :

http://www.logique.jussieu.fr/~alp/cours_2010.pdf

dans lequel on trouvera une bibliographie, dont les références essentielles sont les numéros [1], [4], [17], [25], [27] et [28]. On trouvera d'autres informations sur la page :

http://www.logique.jussieu.fr/~alp