Algèbre et analyse élémentaires II

MM2 (12 ECTS, coef. 4)

Modalités d'évaluation : contrôle continu et examen terminal
Pré-requis : S1 maths
Parcours intégrant obligatoirement cette UE : Mathématiques, Mathématiques et Informatique.
Parcours pouvant intégrer cette UE : tout autre parcours, à l'appréciation du directeur des études.

Programme des enseignements

Espace vectoriel

– espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; sous-espace vectoriel, intersection de sous-espaces, sous-espace engendré, partie libre, base (finie) ; coordonnées d'un vecteur dans une base ; recherche pratique d'une base quand on connait des vecteurs qui engendrent ;
– théorème de la base incomplète ; si E est engendré par p vecteurs, alors toute partie libre a au plus p éléments ; dimension (finie) d'un espace vectoriel ;
– dimension d'un sous-espace d'un espace vectoriel de dimension finie ; hyperplan ; des sous-espaces emboîtés sont égaux si et seulement s'ils ont même dimension ;
– sous-espaces supplémentaires, caractérisation utilisant les dimensions.

Applications linéaires

– définition ; existence et unicité d'une application linéaire envoyant les vecteurs d'une base dans des vecteurs donnés ; endomorphisme ; isomorphisme d'espaces vectoriels ; tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$;
– exemples d'applications linéaires, notamment forme linéaire et projection ;
– noyau, image d'une application linéaire ; rang d'une application linéaire ; application linéaire surjective, injective, caractérisations au moyen du noyau et du rang ;
– si f est une application linéaire, alors f définit un isomorphisme entre tout supplémentaire du noyau et l'image ; théorème de la dimension.

Matrices

– matrice à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; écriture d'un système d'équations linéaires sous la forme $AX = B$;
– matrice d'une application linéaire dans des bases ;
– somme et produit de matrices, matrice transposée ; propriétés de ces opérations ; rang d'une matrice, rang de la transposée ;
– matrice inversible, calcul de l'inverse, inverse d'un produit ; caractérisation des bases ;
– matrice de passage, formule du changement de base pour les vecteurs, formule du changement de base pour les endomorphismes ; matrices semblables.

Formule de Taylor

- démonstration du théorème de Rolle en admettant (cf **S1**) que toute fonction continue sur un segment a un maximum et un minimum ; théorème des accroissements finis et applications ;
- formule de Taylor avec reste en $f^{(n)}(\theta)$; applications à des encadrements (notamment de $\sin x$, $\cos x$, $\exp x$ ou $\ln(1+x)$) ;

Développements limités

- fonction négligeable devant une autre en un point, notation $f(x) \underset{x\to a}{=} o\big(g(x)\big)$, principales propriétés de cette relation (notamment transitivité et multiplicativité) ;
- définition d'un développement limité à l'ordre n d'une fonction en un point, unicité ; cas d'une fonction paire (impaire) ; développement à l'ordre 0 (continuité) et à l'ordre 1 (dérivabilité) ;
- existence du développement limité à l'ordre n pour une fonction ayant une dérivée n-ième ;
- développement limité d'une primitive ; développements limités au point 0 de $\dfrac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, $\exp x$, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^{\alpha}$;
- calcul des développements limités : tronquer un polynôme, développement limité d'une somme, d'un produit, d'une composée ;
- applications des développements limités au calcul des limites et à l'étude locale de fonctions (y compris position du graphe par rapport à une asymptote) ;

Courbes paramétrées planes

- vecteur tangent, étude locale en un point régulier ou singulier, asymptote ;

Intégrales

- primitive, toute fonction continue sur un intervalle a des primitives (admis) ;
- calcul de primitives : intégration par parties (rappel) et changement de variables ;
- primitives de fonctions rationnelles $\frac{P}{Q}$, où Q est un produit de facteurs de degré 1, ou de la forme T, $(X-a)T$ ou T^2, où T est de degré 2 (on pratiquera sans théorie la décomposition en éléments simples dans ces cas-là) ;
- primitives de "fonctions polynômes ou rationnelles en sinus et cosinus".

Equations différentielles linéaires

- équation $y' = a(x)y + b(x)$ et méthode de variation de la constante ;
- dérivée de $t \mapsto \exp(iat)$, où $a \in \mathbb{R}$; équation linéaire du second ordre à coefficients constants et second membre de la forme $P(x)\exp(ax)$, où P est une fonction polynôme.
- exemples de résolution d'équations différentielles $y' = f(y)$.

Objectifs : Approfondissement des techniques en algèbre linéaire (matrices et dimension) et en analyse (limites, primitives, équations différentielles).