Structures algébriques

SA3 (3 ECTS, coef. 1)

Modalités d'évaluation : contrôle continu et examen terminal
Pré-requis : L1 mathématiques
Parcours intégrant obligatoirement cette UE :
Parcours pouvant intégrer cette UE : Mathématiques, Mathématiques et Informatique

Programme des enseignements

Groupes
- structure de groupe ; sous-groupe, intersection de sous-groupes, groupe produit ; morphisme et isomorphisme de groupes ; noyau et image d'un morphisme ;
- division eulidienne dans $\mathbb{Z}$; sous-groupes de $\mathbb{Z}$, pgcd, ppcm ;
- groupe symétrique, transposition, cycle ; décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints (on pourra admettre l'unicité) ;
- signature d'une permutation, groupe alterné.

Anneaux et corps
- structure d'anneau ; sous-anneau, morphisme et isomorphisme d'anneaux ; groupe des inversibles d'un anneau unitaire ;
- corps commutatif, sous-corps ; morphisme ; exemples de sous-corps de $\mathbb{C}$.

Polynômes à une indéterminée
- polynome à une indéterminée sur un corps commutatif $\mathbb{K}$, anneau $\mathbb{K}[X]$; fonction polynôme ; degré d'un polynôme non nul, multiplicativité du degré ;
- diviseur et multiple, division euclidienne ; pgcd ;
- relation de Bézout ; polynômes premiers entre eux ; théorème de Gauss ;
- division par $X-a$, racine d'un polynôme ; un polynôme de degré n a au plus n racines ; énoncé du théorème de d'Alembert-Gauss ;
- relations entre coefficients et racines ;
- polynôme dérivé ; racine multiple dans le cas $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$; formule de Taylor ;
- polynôme irréductible ; polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$, sur $\mathbb{R}$, et exemples de polynômes irréductibles sur $\mathbb{Q}$; décomposition en produit de polynômes irréductibles.

Corps des fractions rationnelles
- fraction rationnelle à une indéterminée sur un corps commutatif $\mathbb{K}$, corps $\mathbb{K}(X)$; degré d'une fraction rationnelle non nulle ; fonction rationnelle ;
- éléments simples ; décomposition en éléments simples (on pourra admettre l'unicité) ; pratique de la décomposition sur $\mathbb{C}$, et sur $\mathbb{R}$ dans les cas les plus simples.

Complément d'algèbre linéaire
- espace vectoriel dual ; base duale (en dimension finie) ; transposition ; retour sur les systèmes d'équations linéaires.

Objectifs : acquisition des structures fondamentales de l'algèbre.