

# Calcul différentiel et topologie

Code U1CD35, 9 ECTS, Semestre S5

**Prérequis :** algèbre et analyse fondamentales II    **Évaluation :** Contrôle continu et examen final

**Mentions concernées :** MIASHS

**Horaires hebdomadaires :** 3 h CM + 4,5 h TD

## Objectifs

Maîtrise des principales notions de calcul différentiel, en vue de l'optimisation.

*NB :* On se limitera dans tout le cours à la dimension finie. On illustrera les notions introduites à l'aide de nombreux exemples.

## Programme

### 1 Topologie

1. Normes sur  $R^n$  : définition, exemples. Parties bornées. Limite, valeur d'adhérence d'une suite.
2. Ouverts, fermés, intérieur, adhérence, partie dense, voisinages, frontière.
3. Fonctions continues, uniformément continues, lipschitziennes. Cas des applications linéaires continues : notion de norme subordonnée.
4. Convergence de suites de fonctions : notions de convergence simple et convergence uniforme.
5. Compact de  $R^n$  (définition avec les suites). Exemples. Un compact est fermé borné. Applications continues sur un compact. Théorème de Heine. Equivalence des normes sur  $R^n$  et conséquences (un fermé borné est compact, les applications linéaires sont continues...).
6. Suites de Cauchy. Complet de  $R^n$  (définition).  $R^n$  est complet. Théorème du point fixe.

### 2 Calcul différentiel

1. Application différentiable, différentielle. Exemples. Somme, produit, composée d'applications différentiables. Dérivées partielles, lien avec la différentielle. Application de classe  $C^1$ . Matrice Jacobienne.
2. Inégalité des accroissements finis.
3. Différentielle seconde. Dérivées partielles secondes, matrice Hessienne. Application de classe  $C^2$ . Théorème de Schwarz. Formule(s) de Taylor à l'ordre 2.
4. Extrema, conditions nécessaires et/ou suffisantes sur la différentielle première ou seconde.
5. Théorème d'inversion locale et théorème des fonctions implicites. Théorème des extrema liés (ces théorèmes pourront être admis).