Probabilités II

Code M43040, 6 ECTS, Semestre S5

Prérequis : Probabilités et statistiques I (S4), algèbre et analyse fondamentale II (S4) **Évaluation :** Contrôle continu et examen final

Mentions concernées : MIASHS

Horaires hebdomadaires : 2 h CM + 3 h TD

Objectifs

Identification des lois usuelles dans des exemples simples de modélisation, caractérisation de la loi de variables discrètes et à densité (fonction génératrice, fonction caractéristique,...) et mise en oeuvre de ces caractérisations dans des calculs de loi, loi jointe et densité dans $\mathbb{R}^n$ principalement dans le cadre de variables indépendantes et dans le cadre gaussien.

Programme

1. *Réintroduction des lois usuelles. Rappels sur les variables aléatoires*
   — Rappels de S4 : cadre général, espérance, variance.
   — Inégalités de Markov et Tchebychev.
   — réintroduire les variables aléatoires discrètes et les lois discrètes usuelles à partir du jeu de pile ou face, loi de Poisson en tant que limite de binômiales.
   — générateur aléatoire utilisant des phénomènes physiques et loi uniforme, loi exponentielle comme unique variable possédant la propriété d'absence de mémoire, montrer différentes simulations permettant de faire apparaître la densité gaussienne via TCL (e.g. via binômiales, différents paramètres).
2. *Variables aléatoires. Vers d'autres caractérisations de la loi.*
   — caractérisation de la loi d'une variable discrète : rappels de S4 sur les masses ponctuelles et la fonction de répartition, introduction des fonctions génératrices. Lien entre moments et fonction génératrice.
   — caractérisation de la loi d'une v.a.r à densité : rappels de S4 sur la densité et la fonction de répartition. Introduction des fonctions caractéristiques : définition générale et propriétés immédiates, puis focalisation sur les exemples suivants : uniforme, exponentielle (puis $\Gamma(n, \lambda)$), gaussienne. Lien entre moments et fonction caractéristique. Admis : La fonction caractéristique d'une v.a.r. caractérise sa loi.
   — Admis : $\{\mathbb{E}(f(X)), f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})\}$ caractérise la loi de X. Formule de changement de variables en dimension 1. Application au calcul de la loi de $Y = f(X)$.
3. *Couples et vecteurs aléatoires : l'exemple du cadre gaussien.* Le but de ce chapitre est essentiellement de se concentrer sur le cadre de variables indépendantes et le cadre gaussien.
   a. Cadre général — rappels de S4 pour les variables discrètes, et sur l'indépendance.
   — loi jointe, notion de densité dans $\mathbb{R}^n$. Introduction aux bases du calcul d'intégrales multiples (théorème de Fubini admis).
   — variables indépendantes. Admis : Caractérisation de l'indépendance via les fonctions caractéristiques.
   — Matrice de covariances. Déterminer le sous-espace lorsque le déterminant est nul.
   b. Cadre gaussien — définition d'un vecteur gaussien X,
   — fonction caractéristique de X,
   — calcul de la loi d'une transformation linéaire de X,
   — condition d'existence d'une densité, calcul de la densité.
   — Condition d'indépendance de coordonnées d'un vecteur gaussien. Contre-exemple lorsque le vecteur n'est pas gaussien.
   — Lorsque (X, Y) est gaussien, trouver a tel que X soit indépendant de $Y - aX$.