

# Probabilités

Code (31HU03MM) U1PS36, 6 ECTS, Semestre S6

**Prérequis :** Probabilités (S4), calcul intégral (S5), algèbre fondamentale II **Évaluation :** Contrôle continu et examen final

**Mentions concernées :** Mathématiques (parcours MA et MF)

**Horaires hebdomadaires :** 2 h CM + 3 h TD

## Objectifs

Application des notions d'intégration au cadre probabiliste (définition de la loi d'une variable, etc...), fonction caractéristique et application au cadre gaussien, famille de variables aléatoires (indépendance, loi jointe), notion de convergence ( $L^p$  et en loi) et théorèmes de convergence (loi des grands nombres, TCL), chaîne de Markov à espace d'état fini.

## Programme

1. *Variable aléatoire*
  - Définition d'un espace de probabilité, d'une variable aléatoire (à valeurs dans un espace général), de la loi d'une variable aléatoire à l'aide des notions vues en intégration (mesure image, etc...),
  - caractérisation de la loi d'une variable  $X$  par  $\mathbb{E}(f(X))$  pour  $f$  dans une classe de fonction assez générale, fonction caractéristique, transformée de Laplace.
2. *Famille de variables aléatoires*
  - loi jointe, lois marginales,
  - indépendance d'une famille de variables, caractérisations de l'indépendance (par  $\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y))$  pour  $f, g$  assez généraux, par les fonctions caractéristiques),
  - définition de la densité conditionnelle  $f_{Y|X} = \frac{f_{(X,Y)}}{f_X}$ .
3. *Cadre gaussien*
  - définition d'un vecteur gaussien, densité quand elle existe,
  - caractérisation de l'indépendance par la covariance,
  - étude de la densité conditionnelle  $f_{Y|X}$  quand  $(X, Y)$  est gaussien.
4. *Convergence*
  - définition et caractérisation de la convergence en loi (via les fonctions de répartition, les fonctions caractéristiques, les fonctions tests continues bornées), de la convergence dans  $L^p$ , implication,
  - loi faible des grands nombres
  - théorème central limite vectoriel,
  - quelques exemples de convergence vers d'autres lois (uniforme discrète vers continue, binomiale vers Poisson).
5. *Chaînes de Markov à espace d'état fini*
  - définition d'une telle chaîne de Markov, noyau de transition,
  - irréductibilité, périodicité,
  - mesure invariante,
  - théorème ergodique.