

Logique pour les mathématiques et l'informatique (Logique II)

Code 31HU08MI, 6 ECTS, Semestre S6

Responsable : Paul Rozière

Prérequis : Calcul propositionnel (Logique I) **Évaluation** : Contrôle continu et examen final

Mentions concernées : L3 Mathématiques et Informatique

Horaires hebdomadaires : 2 h CM + 3 h TD

Objectifs

Introduction à la méthode axiomatique, à la théorie des ensembles, et au calcul des prédicats du premier ordre pour les mathématiques et l'informatique.

Programme

1 Axiomatisation

- Exemples d'axiomatisation : ordre, bon ordre, entiers naturels, ... ;
- axiomatisation des entiers naturels : axiomes de Peano (au « second ordre »), récurrence et définition par récurrence (théorème de Dedekind).

2 Calcul des prédicats du premier ordre

- Premier ordre et ordre supérieur ;
- signature et structure, langage de la logique du premier ordre égalitaire, satisfaction ;
- mise sous forme prénexe, forme de Skolem ;
- complétude de la réfutation par résolution en calcul propositionnel (rappel) et compacité du calcul propositionnel dans le cas dénombrable ; théorème de Herbrand ; compacité en calcul des prédicats (aperçus) ;
- unification et résolution, complétude de la réfutation par résolution en calcul des prédicats.

3 Théorie des ensembles

- Axiomes de Zermelo, et opérations ensemblistes usuelles ;
- construction des entiers de von Neumann ;
- cardinalité : cardinalité finie et principe des tiroirs de Dirichlet ;
- relation d'équipotence, théorème de Cantor-Bernstein ;
- axiome du choix, versions faibles et conséquences pour la cardinalité dénombrable ;
- lemme de Zorn, comparabilité cardinale.