Théorie des ensembles

Code 31HU09MM, 6 ECTS, Semestre S6

Prérequis : Néant **Évaluation :** Contrôle continu et examen final
Mentions concernées : L3 Mathématiques, parcours MF et ME
Horaires hebdomadaires : 3 h C/TD

Résumé

Fondements ensemblistes des mathématiques. Introduction à la méthode axiomatique par la théorie des ensembles.

Objectifs

Maîtriser les principales constructions ensemblistes en mathématiques. Repérer l'utilisation de l'axiome du choix en mathématiques. Manipuler la cardinalité des ensembles infinis. Aborder une construction de $\mathbb{R}$.

Programme

1 Ordres partiels

1. Relation d'ordre, relation d'ordre totale. Relation opposée. Ordre induit sur une partie. Exemple de $(\mathcal{P}X, \subset)$.
2. Majorant, plus grand élément, borne supérieure, et dualement. Treillis, treillis complets. Exemples de sous-ordres issus des mathématiques : sous-groupes d'un groupe, ouverts d'un espace topologique.
3. Applications croissantes, isomorphisme d'ordres partiels. Exemple : isomorphisme d'ordres entre relations d'équivalences sur X et partitions de X.

2 Théorie des ensembles de Zermelo

1. Présentation d'une théorie des ensembles comme un graphe pour la relation d'appartenance. Paradoxe de Russel.
2. Cinq axiomes de la théorie naïve des ensembles : axiome d'extensionalité, axiome de compréhension, axiome de l'union, axiome de la paire, axiome de l'ensemble des parties.
3. Propriétés de croissance des opérations ensemblistes.
4. Définitions dérivées : intersections, couples ordonnés. Existence de l'ensemble produit $A \times B$ défini comme ensemble qui contient tous les couples ordonnés (a, b) avec $a \in A$ et $b \in B$.
5. Relations binaires, fonctions, famille d'ensembles. Injections, surjections, bijections. Exemples de constructions de fonctions par restriction, prolongement, passage au quotient par rapport à une relation d'équivalence. Existence de l'ensemble des fonctions de A dans B.

3 Axiome de l'infini et construction de l'ensemble des entiers naturels

1. Successeur d'un ensemble. Ensemble auto-successeur. Axiome de l'infini. Construction de l'ensemble des entiers naturels.
2. Système de Peano.
3. Ordre sur les entiers.
4. Définition de fonctions par récurrence.
5. Définition et propriétés de l'addition et de la multiplication. Relation avec l'ordre sur les entiers.
6. Ensembles finis comme ensembles en bijection avec un entier naturel. Cardinalité des ensembles finis.

4 Cardinalité et axiome du choix

1. Équipotence. Bijections naturelles usuelles du type $\mathcal{F}(A \times B, C) \to \mathcal{F}\big(A, \mathcal{F}(B, C)\big)$.
2. Ensembles de même cardinal, ensemble de cardinal plus petit qu'un autre. Théorème de Cantor-Bernstein ($|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \Rightarrow |A| = |B|$). Théorème de Cantor (pas d'injection de $\mathcal{P}X$ dans X). Exemples d'équipotences. $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.
3. Axiome du choix introduit à cause de l'impossibilité à traduire des propriétés intuitives des ensembles infinis. Fonctions de choix. Tout ensemble infini contient un ensemble dénombrable.
4. Lemme de Zorn, applications classiques en mathématiques (existence de bases, existence d'un idéal maximal).
5. Applications du lemme de Zorn en théorie des ensembles : cardinalité de l'union d'ensembles infinis, théorie des ensembles bien ordonnés.

5 Constructions des ensembles usuels

1. Construction de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. Propriété de la borne supérieure.
2. Introduction aux structures algébriques ordonnées. Caractérisation de $\mathbb{R}$ comme corps archimédien.