

Mathématiques Discrètes

Code MD4, 6 ECTS, Semestre S4

Prérequis : Néant **Évaluation :** Contrôle continu et examen final

Mentions concernées : Mathématiques

Objectifs

Techniques de dénombrements et utilisation des fonctions génératrices ; découverte de la théorie des graphes et fondements de celle-ci ; travail sur les techniques de preuve sur des objets discrets (étude de cas simples, généralisations, preuves par induction) ; initiation aux aspects algorithmiques.

Programme

1. *Rappels : notations, ensembles, fonctions, relations*
 - Notations sur les ensembles et opérations.
 - Notations et propriétés de base des fonctions de X dans Y . Injection, surjection, bijection. Cardinalité dans le cas fini : union, intersection, complémentaire, ensemble des parties, produit cartésien. Composition des fonctions.
 - Relations, matrice d'une relation binaire sur un ensemble, graphe orienté. Opérations de base sur les relations. Propriétés : réflexivité, transitivité, symétrie, anti-symétrie. Relations "typiques" : relations d'équivalence, ordre.
2. *Méthodes simples de dénombrement*
 - Méthodes inductives : nombre de fonctions injectives de X dans Y , nombre de fonctions bijectives de X dans X , nombre de sous-ensembles de X , nombre de relations.
 - Rappel sur les coefficients binomiaux, formule du binôme, coefficients multinomiaux, formule du multinôme, applications.
 - Principe d'inclusion-exclusion et applications (permutations sans point fixe, nombre de surjections).
3. *Théorie des graphes*
 - Définitions de base pour les graphes : isomorphisme et homomorphisme ; sous-graphes et sous-graphes induits ; chemins, cycles, connexité, distance ; représentation matricielle.
 - Propriétés des degrés des sommets ; score d'un graphe, graphes eulériens, graphes hamiltoniens.
 - Graphes bipartis, couplages, théorème de Hall.
 - Arbres : définition et caractérisations ; arbres de recouvrement d'un graphe ; arbre de recouvrement minimal (algorithme de Kruskal) ; graphes dirigés, matrice d'incidence, théorème de Kirchhoff pour le comptage des arbres de recouvrement.
 - Propriétés de l'algorithme glouton ; matroïdes et notion d'indépendance ; exemples basés sur un espace vectoriel ; notion de base, de rang, de famille génératrice, de circuit.
 - Retour sur la connexité, k -connexité ; opérations sur les graphes ; graphes planaires (caractérisation de Kuratowski, formule d'Euler), mineur d'un graphe.
 - Problèmes de coloriage de graphe : théorème des 4 couleurs.
4. *Méthodes de dénombrement avancées*
 - Fonctions génératrices : introduction, nombres de Fibonacci, nombre d'arbres binaires à n sommets, partition d'entiers.