université PARIS DIDEROT PARIS 7

2015-2016

Master 2ème année de Mathématiques Fondamentales

Responsable pédagogique : Marc Rosso

http://www.math.univ-paris-diderot.fr/formations/masters/math/m2-mathfonda

Table des matières

Cours de base (1er semestre) **4**
Cours spécialisés (2ème semestre) **4**
Tableau des cours par filières **5**

Les renseignements administratifs **7**
Les contacts 7
Le Calendrier 2014/2015 8
L'inscription 9
Structure du Master 2 10
Modalités du contrôle des connaissances 11
Bourse et/ou logement en résidence universitaire 12
Bibliothèque, groupes de travail 12
Le Doctorat de mathématiques 13
Modalités d'inscription en thèse de doctorat à l'Université Paris Diderot 13
Le contrat doctoral 13

Programme des Cours de base **14**
ANALYSE DES EDP (9 ECTS) 15
INTRODUCTION À LA THÉORIE CINÉTIQUE ET À L'ÉQUATION DE BALTZMANN (9 ECTS) 16
INTRODUCTION À LA THÉORIE DE L'HOMOTOPIE (9 ECTS) 17
GÉOMÉTRIE DU MODELE STANDARD DES PARTICULES ÉLÉMENTAIRES (9+9 ECTS) 18
THÉORIE ALGÉBRIQUE DES NOMBRES (9 ECTS) 19
THÉORIE DE LIE ET REPRÉSENTATIONS (9+9 ECTS) 20
COURBES ELLIPTIQUES (9 ECTS) 22
MARTINGALE AND STOCHASTIC INTEGRATION (9+9 ECTS) 23
INTRODUCTION A LA THÉORIE SPECTRALE DES OPÉRATEURS (9+9 ECTS) 24
C* ALGÈBRES ET ALGÈBRES DE VON NEUMANN (9+9 ECTS) 25
ALGÈBRE COMMUTATIVE (9 ECTS) 26
TOPOLOGIE DIFFÉRENTIELLE (9+9 ECTS) 27

Programme des Cours spécialisés **28**
TOPOLOGIE DIFFÉRENTIELLE DES VARIÉTES DE PETITE DIMENSION (9 ECTS) 29
HOMOLOGIE DE HEEGAARD-FLOER (9 ECTS) 30
APPLICATIONS GÉNÉRATRICES ET QUESTIONS CONNEXES (9+9 ECTS) 31
FORMES AUTOMORPHES SUR GL(2) (9ECTS) 33
INTRODUCTION À LA GÉOMETRIE D'ARAKELOV BIRATIONNELLE (9+9 ECTS) 34
COHOMOLOGIE ÉTALE ET CONJECTURES DE WEIL (9+9 ECTS) 35
MOYENNISATION POUR LES EDP NON LINÉAIRES (9 ECTS) 36

Cours de base (1er semestre)

Réunion d'information le **Vendredi 4 septembre 2015** à 10h sur le campus de Jussieu en salle 15/25 1.02
Début des cours le lundi 7 septembre 2015
Cours de 4 heures hebdomadaires (sauf cas particulier), groupes de travail de 2 heures hebdomadaires.

Analyse des EDP Introduction à la théorie cinétique et à l'équation de Boltzmann	Diego Arsenio
Une introduction à la théorie de l'homotopie	Christian Ausoni
Géométrie du modèle standard des particules élémentaires	Daniel Bennequin
Théorie algébrique des nombres	Pierre-Henri Chaudouard
Théorie de Lie et représentations	David Hernandez
Courbes elliptiques	Marc Hindry
Martingales et calcul stochastique	Yueyun Hu & Jean-Stéphane Dhersin
Introduction à la théorie spectrale des opérateurs	Francis Nier & Emmanuel Schenk
C* algèbres et algèbres de Von Neumann	Georges Skandalis
Algèbre commutative	Joerg Wildeshaus
Topologie différentielle	Anton Zorich

Cours spécialisés (2ème semestre)

début des cours : début janvier 2016
Cours de 4 heures hebdomadaires

Topologie différentielle des variétés de petite dimension Homologie des Heegaard-Floer	Christian Blanchet
Applications génératrices et questions connexes	Marc Chaperon
Formes automorphes sur GL(2)	Pierre-Henri Chaudouard
Géométrie d'Arakelov birationnelle	Huyai Chen
Cohomologie étale et conjectures de Weil	Bruno Klingler
Moyennisation des EDP non linéaries	Sergei Kuksin

Tableau des cours par filières

Algèbres d'opérateurs, Géométrie non commutative :

C* algèbre et algèbres de Von Heumann	Georges Skandalis	1er semestre	9+9 ECTS

Algèbre, groupes et représentations :

Théorie de Lie et représentations	David Hernandez	1er semestre	9+9 ECTS
Algèbre commutative	Joerg Wildeshaus	1er semestre	9 ECTS

Topologie algébrique :

Topologie différentielle des variétés de petite dimension Homologie de Heegard-Floer	Christian Blanchet	2ème semestre	9 ECTS 9 ECTS
Une introduction à la théorie de l'homotopie	Christian Ausoni	1er semestre	9 ECTS

Analyse physique mathématique, EDP :

Analyse des EDP Intro à la théorie cinétique & à l'équation de Boltzmann	Diego Arsénio	1er semestre	9 ECTS 9 ECTS
Moyennisation des EDP non linéaires	Sergei Kuksin	2ème semestre	9+9 ECTS
Introduction à la théorie spectrale des opérateurs	Francis Nier & Emmanuel Schenk	1er semestre	9+9 ECTS

Géométrie et dynamique :

Géométrie du modèle standard des particules élémentaires	Daniel Bennequin	1er semestre 2ème semestre	9+9 ECTS
Applications génératrices et questions connexes	Marc Chaperon	2ème semestre	9+9 ECTS
Topologie différentielle	Anton Zorich	1er semestre	9+9 ECTS

Théorie des nombres :

Théorie algébrique des nombres	P.H. Chaudouard	1er semestre	9 ECTS
Courbes elliptiques	Marc Hindry	1er semestre	9 ECTS

Formes automorphes :

Formes automorphes sur GL(2)	Pierre-Henri Chaudouard	2ème semestre	9 ECTS

Géométrie algébrique et théorie des nombres :

Cohomologie étale et conjectures de Weil	Bruno Klingler	2ème semestre	9+9 ECTS
Géométrie d'Arakelov birationnelle	Huyai Chen	2ème semestre	9+9 ECTS

Probabilités :

Martingales et calcul stochastique	Yueyun Hu & J-Stéphane Dhersin	1er semestre	9+9 ECTS

Les renseignements administratifs

Les contacts

Le responsable de la formation : **Marc ROSSO** rosso@imj-prg.fr 01 57 27 92 11	**Lui écrire** Université Paris Diderot – Paris 7 UFR de Mathématiques Bâtiment Sophie Germain Case 7012 75205 Paris cedex 13 **Le rencontrer** Site Paris Rive Gauche (13ème) Bâtiment Sophie Germain 8 place Aurélie Nemours entrée au croisement de l'av. de France et de la rue Alice-Dormon et Léonie-Duquet 6ème étage, bureau 6017
Le secrétariat du Master 2 de Mathématiques Fondamentales : Catherine Prudlo catherine.prudlo@univ-paris-diderot.fr 01 57 27 93 06	**Correspondre** Université Paris Diderot – Paris 7 UFR de Mathématiques Scolarité des Masters 2 Bâtiment Sophie Germain Case 7012 75205 Paris cedex 13 **S'y rendre** Site Paris Rive Gauche (13ème) Bâtiment Sophie Germain 8 place Aurélie Nemours entrée au croisement de l'av. de France et de la rue Alice-Dormon et Léonie-Duquet 5ème étage, bureau 5055

Le Calendrier 2015/2016

4 Septembre	Réunion d'information
5 septembre	Date limite d'envoi des dossiers de candidature
7 septembre	Début des cours du 1er semestre
30 octobre	Date limite pour l'inscription administrative auprès de la scolarité centrale (DEVU)
31 octobre	Date limite pour l'inscription pédagogique auprès du secrétariat du M2 (indication des cours suivis)
Fin octobre	Examens de la 1ère partie du 1er semestre
Fin décembre Début janvier	Session d'examen pour les cours de la 2ème partie du 1er semestre
Janvier	Début des cours du 2ème semestre et inscription pédagogique au secrétariat
Fin février	Examens de la 1ère partie du second semestre Choix du directeur de stage (convention de stage à établir en ligne)
Avril	Session d'examen pour les cours de la 2ème partie du 2ème semestre
Mai-Juin	Campagne de recrutement pour les contrats doctoraux
Fin Juin	Session de rattrapage
30 juin	Date limite de soutenance du rapport de stage pour la session 1
Début juillet	Attribution des contrats doctoraux
30 septembre	Date limite de soutenance du rapport de stage pour la session 2

L'inscription

Conditions d'inscription

La 2ème année de Master (M2) se place normalement en 5ème année des études universitaires.
L'accès en M2 est réservé aux étudiants titulaires :

- d'un master 1, d'une maîtrise de Mathématiques
- ou d'un diplôme équivalent sanctionnant 4 années d'études universitaires (diplômes universitaires étrangers, diplôme d'ingénieur, diplôme d'une Grande Ecole,…)

Modalités d'inscription

- **Candidature des étudiants étrangers :**
  Afin de faciliter la mobilité internationale, l'Université Paris Diderot adhère à l'Agence Campus France. Les étudiants étrangers relevant de la procédure CEF (consultation de la liste des pays concernés : http://www.campusfrance.org/fr/node/1246), doivent prendre connaissance de la procédure de candidature sur le site de Campus France : http://www.campusfrance.org/fr et doivent s'inscrire auprès de cet organisme avant mars 2015.

- **Pour toutes les autres candidatures :** les étudiants doivent déposer une demande de pré-inscription sur le site web : https://ecandidat.app.univ-paris-diderot.fr

  Dates limites de préinscription sur ecandidat :
  Du 20 mai au 30 juin 2015
  Du 25 août au 5 septembre 2015

Dates de retour du dossier

- **Avant le 04 juillet 2015** pour un examen de votre dossier de candidature à la session de juillet,
- **Avant le 5 septembre 2015** pour un examen du dossier de candidature à la session de septembre.

à envoyer ou à déposer :

Envoi	Dépôt
Université Paris Diderot – Paris 7 UFR de Mathématiques Scolarité des Masters 2 Bâtiment Sophie Germain Case 7012 75205 Paris cedex 13	De 9 à 12 h et de 14 à 17 h du lundi au vendredi Site Paris Rive Gauche (13ème) Bâtiment Sophie Germain 8 place Aurélie Nemours entrée au croisement de l'av. de France et de la rue Alice-Dormon et Léonie-Duquet 5ème étage, bureau 5055

Inscription administrative

Dans le cas d'une réponse favorable, l'étudiant recevra un mail et devra prendre rendez-vous par l'intermédiaire du site e-candidat en vue de l'inscription administrative auprès de la Direction des Etudes et de la Vie Universitaire (DEVU). Il devra se munir de toutes les pièces justificatives mentionnées dans ce message.

Date limite d'inscription administrative : 30 octobre 2015

Structure du Master 2

Partie théorique	• Trois UE dont au moins une UE Fondamentale (1er semestre) et une UE d'orientation (2ème semestre). La troisième UE est choisie soit parmi les UE Fondamentales soit parmi les UE d'Orientation (9+9+9 = 27 ECTS)
Partie pratique	• Une UE de stage - 30 ECTS - sous la direction d'un enseignant ou chercheur d'un laboratoire associé : lecture et résumé d'articles de recherche récents, rédaction d'un mémoire, ou d'un cours...
UE d'ouverture	• Une UE d'ouverture - 3 ECTS - (au 1er ou 2ème semestre)

Les cours de 9+9 ECTS sont enseignés pendant tout le semestre sur une base de 4 heures par semaine. Un examen au milieu du semestre permet de valider la moitié du cours (9 ECTS).

Les cours de 9 ECTS sont en général enseignés pendant la moitié du semestre sur une base de 4 heures par semaine. Certains cours de 9 ECTS sont enseignés pendant tout le semestre sur une base de 2 heures par semaine.

Le choix des cours

- **Les cours de base** doivent être choisis dans la liste des cours du M2 « Mathématiques Fondamentales ». Ils sont soutenus par un groupe de travail dont les activités concourent à l'assimilation du cours de base et à la préparation de l'examen qui le sanctionne.

- **Les cours spécialisés** sont pris en principe dans la liste des cours spécialisés du M2 de Mathématiques Fondamentales.

  Ils peuvent également être choisis parmi les cours de M2 extérieurs, sous réserve de l'accord préalable du responsable du M2, et à condition de correspondre au même volume horaire.
  Voici une liste non restrictive de M2 extérieurs possibles :

  - M2 Mathématiques Fondamentales à Paris 6
  - M2 Mathématiques Pures à Paris 11
  - M2 Mathématiques à Paris 13

  Il existe d'autres possibilités parmi divers cours de M2 de la région parisienne.

- **L'unité d'ouverture** correspond à des activités complémentaires choisies en accord avec le responsable du M2. Parmi les possibilités : exposé oral et/ou écrit dans le cadre d'un groupe de travail, rapport écrit et/ou oral ou séminaire « extérieur », etc…

L'étudiant devra informer régulièrement le Secrétariat du M2 de l'UFR de Mathématiques de ses choix (cours de base, cours spécialisé, directeur de stage, demande d'allocation de recherches…). Il devra particulièrement le faire en début de second semestre pour l'indication des cours spécialisés, de l'unité d'ouverture et du directeur de stage.

Modalités du contrôle des connaissances

Pour obtenir le diplôme de Master, l'étudiant doit être reçu à chacune des cinq épreuves composant son diplôme, soit :

Partie théorique	Partie pratique	Ouverture
1 UE fondamentale 9 ECTS	Stage 30 ECTS	UE d'ouverture 3 ECTS
1 UE d'orientation 9 ECTS		
1 UE fondamentale ou d'orientation 9 ECTS		

Chaque cours de la **partie théorique** est sanctionné par des épreuves écrites, de 3 heures, accompagnées, le cas échéant, si la note d'écrit, sur 20, est ≥ 8, et < 10, d'un oral de rattrapage.
Pour chaque cours, la note finale est donnée sur 20.
Seules sont prises en compte dans cette évaluation les UE pour lesquelles la note obtenue est ≥ 10.

Les dates et les horaires des **examens** sont affichés au 2ème étage du bâtiment Sophie Germain, à gauche lorsque l'on sort du palier des ascenseurs. Ils sont également disponibles sur le site du M2, un mois auparavant. Il n'y a pas de convocation individuelle.

Le stage (en général d'une durée de 3 mois) donne lieu :

- à la rédaction d'un mémoire
- à une soutenance orale devant un collège comprenant au moins 2 membres habilités à diriger des recherches.

Il fait l'objet d'un rapport du directeur de stage et est sanctionné par une note sur 20.

La soutenance doit :

- Se dérouler avant le 30 juin pour une prise en compte de la note en session 1 ;
- Se dérouler avant le 30 septembre pour une prise en compte de la note en session 2.

Le M2 est délivré avec pour note globale la « moyenne pondérée » des notes obtenues dans chacune des catégories d'UE ci-dessus. Dans chaque catégorie, seules sont conservées pour le calcul, des notes correspondant au nombre d'ECTS requis. La note globale est sur 20.

Bourse et/ou logement en résidence universitaire

Le ministère chargé de l'Enseignement supérieur accorde aux étudiants un certain nombre d'aides gérées par le Crous, en lien avec les universités : bourses sur les critères sociaux, aide d'urgence annuelle, passeport de mobilité, prêts d'honneur, l'aide au mérite…

Pour de plus amples informations, vous devez prendre contact avec :

- le service social de l'Université Paris Diderot :
http://www.univ-paris-diderot.fr/sc/site.php?bc=vie_etudiante&np=Aides

- le CNOUS : http://www.cnous.fr

Bibliothèque, groupes de travail

Bibliothèque

La bibliothèque Mathématiques Informatique Recherche : http://www.biblio.math.jussieu.fr
située dans le bâtiment Sophie Germain, 8ème étage, 8 Place Aurélie Nemours, 75013 Paris est à la disposition des étudiants du M2. Il est également possible d'emprunter un Ipad à domicile pour une durée d'un mois, renouvelable un mois.

Groupes de travail

Des groupes de travail et séminaires d'initiation à la recherche sont organisés dans certains domaines et les étudiants sont vivement invités à y participer.

Ecoles d'été

Les étudiants peuvent être amenés à suivre d'autres activités d'initiation à la recherche : écoles d'été, congrès, séminaires…

Le Doctorat de mathématiques

Le doctorat débute normalement en 6ème année des études universitaires et s'adresse aux étudiants titulaires d'un M2 ou d'un titre de niveau équivalent.

La durée conseillée des études doctorales est de 3 ans.
Une année supplémentaire peut être accordée après examen du dossier (incluant un rapport du directeur de thèse prouvant l'avancement des travaux) et autorisation du Directeur de thèse, du Directeur de l'Ecole Doctorale et du Président de l'Université.

Modalités d'inscription en thèse de doctorat à l'Université Paris Diderot

Les étudiants titulaires du M2 peuvent, l'année suivante, s'inscrire en Diplôme de Doctorat de Mathématiques après avoir au préalable obtenu l'accord d'un Directeur de recherche et du Directeur de l'Ecole Doctorale. Afin de candidater pour une inscription en doctorat, ils devront se connecter sur le site web suivant : https://ecandidat.app.univ-paris-diderot.fr

Pour l'examen de leurs demandes, les étudiants devront déposer auprès du Bureau de l'Ecole Doctorale (Bureau 5056) de juin à octobre environ, les documents suivants :

- Une lettre exposant la nature de la recherche envisagée et le projet de thèse,
- Un curriculum vitae détaillé,
- Une lettre de recommandation rédigée par l'enseignant du M2 (ce point ne concerne pas les étudiants qui ont obtenus le M2 à Paris 7)
- Le détail des résultats obtenus en M2 (aux examens et au stage, avec indication des enseignants et des intitulés correspondants)
- L'attestation de M2 (provisoire ou définitive) délivrée par l'université d'origine
- L'attestation de financement

A titre indicatif pour l'année 2014-2015 :
- Date limite des inscriptions administratives : 27 novembre 2015

Le contrat doctoral

Le dossier de candidature est à remettre au secrétariat de l'Ecole Doctorale de Paris Centre avant la mi-juin 2016 (bâtiment Sophie Germain, 5ème étage, bureau 5056 pour les candidatures de Paris Diderot).

Les résultats des attributions des contrats doctoraux seront annoncés début juillet 2016.

Programme des Cours de base

ANALYSE DES EDP (9 ECTS)
Diogo Arsenio
1er semestre (1ère partie)

Présentation

Nous donnerons dans une première partie les outils standard pour analyser des équations aux dérivées partielles. Nous les appliquerons ensuite sur trois types d'équations linéaires du second ordre (elliptique, parabolique et hyperbolique).

Programme

- Espaces réflexifs, séparables. Compacité faible et faible*.
- Éléments de théorie des distributions. Espaces de Sobolev.
- Équations elliptiques : équation de Laplace, régularité, principe du maximum et fonctions harmoniques.
- Équations hyperboliques : équation de transport et méthode des caractéristiques.
- Équations paraboliques : équation de la chaleur et équation de réaction-diffusion.

Connaissances requises

Théorie de l'intégration (Lebesgue).

Bibliographie

[1] Brezis : Analyse fonctionnelle
[2] Evans : Partial differential equations.
[3] Gilbarg-Trudinger : Elliptic partial differential equations of second order
[4] Lax : Functional analysis
[5] Folland : Introduction to partial differential equations

INTRODUCTION À LA THÉORIE CINÉTIQUE ET À L'ÉQUATION DE BALTZMANN (9 ECTS)

Diogo Arsenio

1er semestre (2ème partie)

Présentation

Les équations cinétiques forment une partie essentielle de la théorie mathématique des EDP et de la physique. Leur analyse nécessite une approche spécifique que nous introduirons au fur et à mesure de notre étude des équations de type Vlasov dans un premier temps, puis des équations collisionnelles de type Boltzmann dans un deuxième temps. Nous explorerons également les liens entre les équations cinétiques et divers modèles macroscopiques, tels que ceux de la mécanique des fluides.

Programme

- Équation de transport cinétique.
- Équation de Vlasov-Poisson.
- Équation de Vlasov-Maxwell.
- Lemmes de moyennes, dispersion et hypoellipticité.
- Équation de Boltzmann (dérivation, propriétés de l'opérateur de collisions, théorème *H*, renormalisation, dimension 1).
- Formulations cinétiques.
- Limites hydrodynamiques.

Connaissances requises

Analyse des EDP.

Bibliographie

[1] Bouchut, Golse, Pulvirenti : Kinetic equations and asymptotic theory

[2] Cercignani : The mathematical theory of dilute gases

[3] Cercignani : The Boltzmann equation and its applications

[4] Saint-Raymond : Hydrodynamic limits of the Boltzmann equation

INTRODUCTION À LA THÉORIE DE L'HOMOTOPIE (9 ECTS)
Christian Ausoni (Paris 13)
1er semestre

Présentation

Ce cours sert d'introduction à la topologie algébrique, en particulier à la théorie de l'homotopie sur les espaces topologiques.

Programme

Dans un premier temps, nous étudierons la catégorie homotopique et les groupes d'homotopie des espaces, avec comme outil principal le théorème d'excision de Blakers-Massey.
Nous introduirons les notions de fibrations et de cofibrations, et les suites exactes associées, ainsi que la dualité de Eckmann-Hilton.
Finalement, nous aborderons la théorie homotopique des CW-complexes et termineront par une introduction aux catégories de modèles.

GÉOMÉTRIE DU MODELE STANDARD DES PARTICULES ÉLÉMENTAIRES (9+9 ECTS)
Daniel Bennequin
1er et 2nd semestres

Cours en deux parties, la première en fin du premier semestre, et la deuxième en début du deuxième semestre.

Présentation

Il s'agit de présenter les ingrédients géométriques principaux du modèle de Weinberg et Salam, en particulier le rôle du boson de Higgs. Le cours ne supposera aucune connaissance en Physique, et peut donc servir d'introduction aux connexions, théories de jauges, aux spineurs et aux équations aux dérivées partielles qui régissent leurs dynamiques quasi-classiques. Les outils présentés concernent la géométrie différentielle, la théorie des représentations unitaires et la théorie du groupe de renormalisation. La première partie exposera le modèle standard sous la forme la plus couramment admise, la seconde partie proposera un point de vue moins orthodoxe et complètement géométrique.

Programme

1. Notion de particule élémentaire. Représentations unitaires irréductibles du groupe de Poincaré.
2. Algèbres de Clifford, spineurs, équation de Dirac.
3. Réalisations spinorielles des représentations.
4. Fibrés principaux, connexions principales, fibrés associés, connexions linéaires.
5. Équations d'Einstein, de Maxwell, de Yang-Mills-Higgs.
6. Notion d'interaction quantique selon Tomonaga, Schwinger et Feynman.
7. Théories effectives. Groupe de renormalisation.
8. Origine géométrique du modèle

Connaissances requises

M1 de Maths, si possible avec un cours de base de géométrie différentielle et un cours sur la théorie des groupes.

Bibliographie

[1] S.Weinberg “The quantum theory of fields”, I,II, Cambridge UP 1995, 1996;
[2] C.H.Taubes, “Differential Geometry. Bundles, connections, metrics and curvatures”, Oxford, 2012;
[3] G.t’Hooft “Under the spell of the gauge principle”, World Scientific, 1994;
[4] A.M.Polyakov “Gauge fields and strings” CRC Press, 1987.

THÉORIE ALGÉBRIQUE DES NOMBRES (9 ECTS)
Pierre-Henri Chaudouard
1er semestre

Présentation

Le but du cours est de présenter certaines notions de base de théorie algébrique des nombres. Ce cours sera utile pour suivre le cours d'introduction aux formes automorphes proposé au second semestre.

Programme

1. Étude des corps locaux et globaux
2. Adèles et Idèles
3. Théorèmes classiques de compacité et de finitude
4. Analyse de Fourier
5. Thèse de Tate

Connaissances requises

Notions d'algèbre commutative (modules, anneaux principaux, de Dedekind), théorie de Galois. Quelques notions élémentaires d'analyse complexe et d'analyse de Fourier.

Bibliographie

[1] J. Cassels -J.Fröhlich, Algebraic number theory
[2] S. Lang, Algebraic number theory
[3] D. Ramakrishnan, R. Valenza Fourier Analysis on Number Fields
[4] J-P Serre Corps locaux
[5] A. Weil Basic Number theory

THÉORIE DE LIE ET REPRÉSENTATIONS (9+9 ECTS)
David Hernandez
1er semestre

Présentation

La théorie des représentations, notamment des algèbres de Lie, est un sujet central en mathématiques qui a de nombreuses applications à d'autres branches des mathématiques (géométrie, théorie des nombres, combinatoire, topologie...) mais aussi en physique théorique (systèmes intégrables quantiques, théorie conforme des champs...).
Le but de ce cours est double : d'une part donner une introduction aux concepts et outils classiques de la théorie de Lie, notamment en théorie des représentations, et d'autre part étudier des généralisations (de dimension infinie et quantiques) ainsi que certaines de leurs applications importantes.

Programme

1. Groupes et algèbres de Lie de dimension finie

- Algèbres de Lie : définition, notion de représentation, exemples classiques, motivations et lien avec les groupes de Lie.
- Algèbres de Lie nilpotentes, résolubles, semi-simples.
- Catégories de représentations d'une algèbre de Lie, représentations irréductibles, représentations semi-simples. Représentation adjointe.
- Complète réductibilité pour les algèbres de Lie semi-simples (théorème de Weyl).
- Structure des algèbres de Lie semi-simples. Systèmes de racines, groupe de Weyl.

2. Représentations des algèbres de Lie de dimension finie

- Modules de plus haut poids, modules de Verma, modules simples.
- Catégorie $\mathcal{O}$. Paramétrisation des représentations simples. Séries de Jordan-Holder.
- Multiplicité d'une représentation simple dans une représentation de la catégorie $\mathcal{O}$.
- Représentations de dimension finie, paramétrisations par les poids dominants.
- Structure tensorielle, morphisme de caractère, anneau de Grothendieck.

3. Algèbres de Lie de dimension infinie

- Algèbres de Kac-Moody, présentation de Serre.
- Structure des algèbres de Kac-Moody symétrisables. Sous-algèbres de Borel.
- Catégorie $\mathcal{O}_{\text{int}}$ des représentations intégrables dans la catégorie $\mathcal{O}$.
- Représentations extrémales de Kashiwara.
- Algèbres de lacets et extensions. Isomorphisme entre les présentations des algèbres affines.
- Algèbres de Virasoro et de Heisenberg : lien avec les algèbres affines.
- Racines réelles, racines imaginaires.
- Catégorie des représentations de dimension finie. Représentations d'évaluation. Paramétrisation des représentations simples par les polynômes de Drinfeld.

4. Equation de Yang-Baxter, groupes quantiques et systèmes intégrables

- Algèbres de Hopf.
- Algèbres affines quantiques : représentations de dimension finie, polynômes de Drinfeld.
- Equation de Yang-Baxter quantique et R-matrice universelle.
- Anneau de Grothendieck et q-caractères.
- Matrices de transfert, relations de Baxter.
- Représentations préfondamentales, spectre quantique et systèmes intégrables quantiques

Connaissances requises

L'algèbre linéaire standard

Bibliographie

[1] **J-P. Serre**, *Lie algebras and Lie groups*, 1964 lectures given at Harvard University, Lecture Notes in Mathematics, 1500, (2006)

[2] **W. Fulton et J. Harris**, *Representation Theory* : A First Course, Graduate Texts in Mathematics, 129 (3ème édition, 2004).

[3] **J. Humphreys**, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, 9. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978

[4] **V. Kac**, *Infinite-dimensional Lie algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[5] **D. Hernandez**, *An Introduction to Affine Kac-Moody Algebras*, CTQM Master Class Series 2 (2006), 1–20, http://www.math.jussieu.fr/~hernandez/resumedan2.pdf

[6] **V. Chari and A. Pressley**, *A guide to quantum groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[7] **P. Etingof, I. Frenkel and A. Kirillov**, *Lectures on representation theory and Knizhnik-Zamolodchikov equations*, Mathematical Surveys and Monographs, 58. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[8] **E. Frenkel**, *Langlands correspondence for loop groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 103. Cambridge University Press, Cambridge, 2007

COURBES ELLIPTIQUES (9 ECTS)
Marc Hindry
1er semestre

Présentation

Le but du cours est de présenter les bases de la théorie des courbes elliptiques, principalement du point de vue de la géométrie et de l'arithmétique. On démontrera notamment les deux principaux théorèmes diophantiens classiques de Siegel (finitude des points entiers) et Mordell-Weil (génération finie du groupe des points rationnels) et on abordera quelques outils utilisés notamment dans les travaux de Wiles : courbes modulaires et représentations galoisiennes.

Programme

1. Géométrie des courbes elliptiques : modèle de Weierstrass, loi de groupe, différentielles, isogénies.
2. Courbes elliptiques et tores complexes, courbes modulaires.
3. Courbes elliptiques sur les corps finis et les corps p-adiques.
4. Courbes elliptiques sur les corps globaux : hauteur de Néron-Tate, théorème de Mordell, théorème de Siegel.
5. Représentation galoisienne et fonction L associées à une courbe elliptique.

Connaissances requises

Les prérequis sont minimaux, essentiellement un peu de théorie algébrique des nombres et un cours d'introduction à la géométrie algébrique (vocabulaire et théorème de Riemann-Roch sur les courbes).

Bibliographie

[1] Silverman J. Arithmetic of Elliptic Curves. Springer 1986.
[2] Silverman J. Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves. Springer 1994.
[3] Notes de cours de Jan Nekovar Elliptic functions and elliptic curves. http://www.math.jussieu.fr/nekovar/co/ln/el/

MARTINGALE AND STOCHASTIC INTEGRATION (9+9 ECTS)
Jean-Stéphane Dhersin et Yueyun Hu (Paris 13)
1er semestre

Programme

This course is an introduction to the stochastic calculus:

1) Preliminaries (optional stopping time, Gaussian vectors, discrete martingale)
2) Brownian motion
3) Continuous martingales (square integrable martingale, local martingale)
4) Stochastic integrals and the Itô formula
5) Representation of martingales
6) The Girsanov theorem
7) Stochastic differential équations
8) Local times
9) Bessel processes

INTRODUCTION A LA THÉORIE SPECTRALE DES OPÉRATEURS (9+9 ECTS)
Francis Nier et Emmanuel Schenck (Paris 13)
1er semestre

Présentation

Le but de ce cours est d'introduire les notions de base de la théorie spectrale avec quelques exemples classiques.

Certains aspects des C*-algèbres ou du calcul pseudo-différentiel seront abordés et feront un lien avec d'autres cours où ces sujets sont plus développés. Bien que les opérateurs auto-adjoints seront traités précisément, plusieurs résultats et exemples concerneront plus généralement des opérateurs non auto-adjoints.

Programme

- Opérateurs et spectre.
- Opérateurs auto-adjoints. Théorème spectral. Théorème de Stone et de Hille-Yosida.
- Perturbations.
- Formes quadratiques et commutateurs.
- Espaces de Schatten.
- Outils pseudodifférentiels et semi-classiques.
- Loi de Weyl.

Connaissances requises

Les prérequis pour ce cours sont : analyse fonctionnelle niveau M1 ; théorie des distributions.

C* ALGÈBRES ET ALGÈBRES DE VON NEUMANN (9+9 ECTS)
Georges Skandalis
1er semestre

Programme

1ère partie : C*-algèbres

- Algèbres de Banach et spectre. C*-algèbres
- C*-algèbres commutatives
- Calculs fonctionnels.
- Eléments positifs. Construction GNS.
- C*-algèbre d'un groupe discret

2e partie Algèbres de von Neumann

- Théorème du bicommutant de von Neumann
- Théorème de densité Kaplansky
- Classification en types et exemples
- Algèbres de von Neumann de type I
- Algèbres de von Neumann de type II
- Additivité de la trace
- Exemples : algèbres de groupe et actions ergodiques
- Exemple de facteurs de type III

ALGÈBRE COMMUTATIVE (9 ECTS)
Joerg Wildeshaus (Paris 13)
1er semestre

Présentation

Ce cours a comme but de fournir des bases algébriques solides pouvant servir ensuite, au suivi d'un cours sur la Géométrie Algébrique.

Plus précisément, on utilisera systématiquement le langage des catégories et foncteurs, et on caractérisera systématiquement les constructions algébriques (produit tensoriel, localisation, etc.) par leurs propriétés universelles.

Programme

Programme (susceptible d'être modifié) :

- Anneaux et modules : rappels
- Conditions de finitude
- Le produit tensoriel
- Catégories et foncteurs
- La localisation des anneaux et des modules
- Hauteur et dimension
- Anneaux réguliers

TOPOLOGIE DIFFÉRENTIELLE (9+9 ECTS)
Anton Zorich
1er semestre

Présentation

Le but du cours est de faire une passerelle entre le cours de topologie algébrique de base en M1 (où traditionnellement on ne discute pas ou discute peu les variétés) et des cours spécialisés (où on considère les notions de topologie différentielle comme déjà acquises). Ce cours (surtout la théorie de Morse) peut être utile pour les cours spécialisés "Topologie des variétés de petite dimension" et "Homologie de Heegaard-Floer" de Christian Blanchet au deuxième semestre.

Programme

Partie 1.

1. Transversalité. Variétés et sous-variétés lisses. L'indice d'intersection, degré d'une application.
2. Éléments d'homologie et de cohomologie. Cohomologie de Rham. Complexes cellulaires, homologie cellulaire.
3. Applications (variétés de Grassmann et cellules de Schubert, notions de classes caractéristiques).

Partie 2.

1. Théorie de Morse.
2. Les notions de feuilletages et de systèmes dynamiques lisses.

Connaissances requises

Il est souhaitable d'avoir suivi un cours de topologie algébrique et de géométrie différentielle de niveau M1.

Bibliographie

[1] Allen Hatcher. Algebraic Topology.
[2] William Massey. A basic course in algebraic topology.
[3] John Milnor. Topology from the differentiable viewpoint.
[4] John Milnor. Morse Theory.
[5] John Milnor. Lectures on the h-Cobordism Theorem.
[6] John Milnor and James D. Stasheff. Characteristic Classes.
[7] Boris Doubrovin, Anatolii Fomenko, Sergei Novikov. Modern Geometry - Methods and Applications

La bibliographie sur la topologie différentielle élémentaire est abondante ; il y a plein d'autres livres.

Programme des Cours spécialisés

TOPOLOGIE DIFFÉRENTIELLE DES VARIÉTES DE PETITE DIMENSION (9 ECTS)
Christian Blanchet
2nd semestre (1ère partie)

Présentation

Le but du cours est d'introduire à l'étude des variétés de dimension 3 et 4 et de leurs invariants classiques et quantiques.

Programme

1. Construction de variétés de dimension 3 et 4.
2. Théorie classique des nœuds et entrelacs ; construction d'invariants.
3. Présentations des variétés de dimension 3 ; construction d'invariants.
4. Cobordisme, TQFT.
5. Présentations des variétés de dimension 4 ; calcul des invariants classiques.

Connaissances requises

- Topologie algébrique : homologie.
- Notions de base sur les variétés différentielles.

HOMOLOGIE DE HEEGAARD-FLOER (9 ECTS)
Christian Blanchet
2nd semestre (2ème partie)

Présentation

Le but du cours est de construire l'homologie de Heegaard-Floer des variétés de dimension 3, d'établir ses propriétés de chirurgie et de présenter quelques calculs et applications.

Programme

1. Homologie de Heegaard-Floer des noeuds, version combinatoire
2. Topologie des espaces symétriques des surfaces.
3. Définition de l'homologie de Heegaard-Floer.
4. Triangles holomorphes, action des cobordismes et théorèmes de chirurgie.
5. Exemples de calculs et d'applications.

Connaissances requises

- Topologie algébrique : homologie.
- Variétés, description en dimension 3 et 4, diagrammes de Heegaard, chirurgie.

APPLICATIONS GÉNÉRATRICES ET QUESTIONS CONNEXES (9+9 ECTS)
Marc Chaperon

2nd semestre

Présentation

C'est Sir William Rowan Hamilton qui, il y a fort longtemps, a eu l'idée de traduire la composition des transformations symplectiques par l'addition de leurs fonctions génératrices. Celles-ci décrivent le graphe de la transformation dans des coordonnées «tordues» ayant un pied à la source et un au but. Vers le milieu des années 80, une variante de cette remarque[2] a rendu tout un pan de la topologie symplectique facilement accessible sans aucun recours à l'analyse fonctionnelle [9, 10, 6, 7, 5, 8] tout en permettant de définir des solutions faibles d'équations de Hamilton-Jacobi [3, 4, 8, 1, 11].

Curieusement, la même idée s'est peu à peu imposée avec le même résultat [18, 13, 14] dans un domaine très différent : la théorie des variétés invariantes de systèmes dynamiques. Comme celle-ci contient en principe [12, 16, 13] celle des (semi-)conjugaisons différentiables de systèmes dynamiques, une partie importante de la dynamique est de ce fait accessible par des méthodes concises et très élémentaires.

Le but du cours est d'introduire quelques faits et notions de base en topologie symplectique d'une part, en dynamique d'autre part, par le biais de cette similarité superficielle entre leurs méthodes. La partie la plus récente, présentée rapidement dans [14] et inédite à ce jour dans sa version longue [15], contient en particulier un traitement simple et général de l'hyperbolicité normale [17, 19].

On abordera à la fin de manière moins dogmatique, si le temps et la patience de l'auditoire le permettent, les questions de «petits dénominateurs » [20].

Programme

1. Géométrie symplectique et de contact, équations de Hamilton-Jacobi, KAM faible.
2. Variétés invariantes, conjugaisons, bifurcations, KAM.

Connaissances requises

Bonne compréhension du calcul différentiel et des équations différentielles ; rudiments sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. Les notions et résultats utiles seront rappelés.

Bibliographie

1ère Partie

[1] P. Bernard and J. Oliveira dos Santos. A geometric definition of the Mañé-Mather set and a theorem of Marie-Claude Arnaud. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **152** (2012), 167–178

[2] M. Chaperon. Une idée du type « géodésiques brisées » pour les systèmes hamiltoniens. *C. R. Acad. Sc. Paris* **298** (1984) série A, 293–296

[3] — Lois de conservation et géométrie symplectique. *C. R. Acad. Sc. Paris* **312**, *Série 1* (1991), 345–348

[4] — On generating families. *H. Hofer, C.H. Taubes, A. Weinstein and E. Zehnder (eds.), The Floer Memorial Volume.* Progress in Mathematics **133** (1995), Birkhäuser, 283–296

[5] Y. Eliashberg, M. Gromov. Lagrangian Intersection Theory : Finite-Dimensional Approach. *A.M.S. Transl. Series 2*, **186** (1998), 27–118

[6] A. Givental. A symplectic fixed point theorem for toric manifolds. *H. Hofer, C.H. Taubes, A. Weinstein and E. Zehnder (eds.), The Floer Memorial Volume.* Progress in Mathematics **133** (1995), Birkhäuser

[7] D. McDuff, D. Salamon. *Introduction to symplectic topology*. Oxford Science, 1995, augmented paperback edition, 1999

[8] G. P. Paternain, L. Polterovich and K. F. Siburg. Boundary rigidity for Lagrangian submanifolds, non-removable intersections, and Aubry-Mather theory. *Mosc. Math. J.* **3**, 593–619 (2003)

[9] J.-C. Sikorav. Problèmes d'intersections et de points fixes en géométrie hamiltonienne. *Comment. Math. Helv.* **62** (1987), 62–73

[10] C. Viterbo. Generating functions, Symplectic Geometry and Applications. *Proceedings of the ICM Zürich 1994*. Birkhäuser.

[11] Wei Q. Viscosity solution of the Hamilton–Jacobi equation by a limiting minimax method. Nonlinearity 27 (2014), 17–41.

2ème Partie

[12] M. Chaperon. Variétés invariantes et formes normales. C. R. Acad. Sc. Paris t. 317, Série I (1993), 87–92

[13] — The Lipschitzian core of some invariant manifold theorems. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **28** (2008), 1419–1441

[14] — Generating maps, invariant manifolds, conjugacy. *Journal of Geometry and Physics*, **87** (2015), 76–85

[15] — Modest proposal for preventing functional analysis from being a burden to invariant manifold theory, une cinquantaine de pages, 2015

[16] —, F. Coudray. Invariant manifolds, conjugacies and blow-up. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **17** (1997), 783–791

[17] N. Fenichel. Persistence and Smoothness of Invariant Manifolds for Flows. Ind. Univ. Math. J. 21 (1971), 193–225.

[18] R. McGehee, E. A. Sander. *A new proof of the stable manifold theorem. Z. Angew. Math. Phys.* **47**, no. 4 (1996), 497–513

[19] M. W. Hirsch, C. C. Pugh, M. Shub. *Invariant manifolds.* Springer Lecture Notes in Mathematics **583** (1977)

[20] J.-C. Yoccoz. Cours au Collège de France 2013–2014.

FORMES AUTOMORPHES SUR GL(2) (9ECTS)
Pierre-Henri Chaudouard
2ème semestre

Présentation

Le but du cours est de fournir une introduction à la théorie moderne des formes automorphes en se limitant au cas du groupe GL(2). (NB : Il devrait être complémentaire d'un cours sur les formes modulaires et les représentations galoisiennes de J-F Dat à P6. Dans le cours, on se concentrera surtout sur les aspects analytiques et le point de vue adélique et "théorie des représentations").

Programme

1. Adèles de GL(2), classes d'adèles, décomposition d'Iwasawa, Théorie de la réduction, mesure de Haar
2. Notion de formes automorphes, terme constant ; développement de Fourier
3. Comportement asymptotique ; troncature d'Arthur
4. Formes automorphes cuspidales ; propriétés, multiplicité dans le spectre L^2
5. Séries d'Eisenstein, terme constant, convergence, opérateur d'entrelacement. Applications.
6. Décomposition L^2, noyau automorphe, trace tronquée de la représentation régulière dans le spectre L^2

Connaissances requises

Le contenu du cours de théorie algébrique des nombres. Quelques notions élémentaires d'analyse complexe, d'analyse de Fourier et de théorie spectrale seront les bienvenues.

Bibliographie

[1] A. Borel Automorphic forms on SL(2,R)
[2] D. Bump Automorphic Forms and Representations
[3] Harish-Chandra Automorphic Forms on Semisimple Lie Groups
[4] Moeglin-Waldspurger Décomposition spectrale et séries d'Eisenstein

INTRODUCTION À LA GÉOMETRIE D'ARAKELOV BIRATIONNELLE (9+9 ECTS)
Huayi Chen
2ème semestre

Présentation

Le but de ce cours est de présenter des notions de base de la géométrie d'Arakelov et des avancements récents dans l'étude des invariants arithmétiques birationnels. La géométrie d'Arakelov est une théorie de la géométrie arithmétique, qui relie naturellement plusieurs domaines mathématiques, comme géométrie algébrique, théorie des nombres, géométrie analytique etc, où divers outils mathématiques interviennent activement.

Programme

La première partie du cours porte sur la base de la géométrie d'Arakelov, mais présentée dans un langage plus moderne, notamment celui des courbes adéliques. Ce point de vue permet non-seulement de traiter toutes les places d'un corps de nombres d'une manière équitable, mais encore d'unifier l'étude de la géométrie arithmétique relativement à différentes situations : corps de nombres, corps de fonctions, corps avec la valuation triviale, variété (arithmétique) polarisée etc. Certains outils de la géométrie algébrique utilisés dans la présentation de cette théorie seront aussi abordés.

- diviseur, fibré vectoriels, positivité (amplitude, effectivité numérique etc.), variétés projectives
- cycles algébriques dans une variété, intersection d'un cycle avec un diviseur de Cartier
- courbes arithmétiques, géométrie des nombres
- courbe adélique, fibrés vectoriels adéliques et leur géométrie
- variété arithmétique sur une courbe adélique, diviseurs adéliques
- intersection de diviseurs adéliques
- théorème de Hilbert-Samuel arithmétique

La deuxième partie du cours porte sur des résultats récents dans la géométrie d'Arakelov birationnelle, en mettant un accent sur ses liens avec la géométrie convexe et l'approche probabiliste. Selon l'avancement du cours et la préférence des auditeurs, on traitera l'ensemble ou une partie des sujets suivants :

- fonction volume d'un diviseur adéliques, positivité arithmétique (amplitude, grosseur etc.)
- variétés toriques sur une courbe adélique, diviseurs adéliques toriques, hauteur
- corps d'Okounkov et son variant arithmétique
- théorèmes de limite en géométrie d'Arakelov
- décomposition de Zariski et approximation de Fujita d'un diviseur adélique
- convexité des invariants arithmétiques, inégalités de Brunn-Minkowski et isopérimétrique
- diverses applications

Connaissances requises

Cours de géométrie algébrique et de théorie des nombres.

Bibliographie

Des notes de cours seront rédigées et mises en disposition progressivement.

COHOMOLOGIE ÉTALE ET CONJECTURES DE WEIL (9+9 ECTS)
Bruno Klingler
2ème semestre

Programme

Partie I : Cohomologie étale

- Morphismes étales
- Le site étale
- Faisceaux sur le site étale, leur cohomologie, catégorie dérivée des faisceaux, image directe supérieure
- Pureté
- Changement de base propre et lisse

Partie II : Conjectures de Weil

- Fonctions zétas
- Formule des traces de Lefschetz
- Pinceaux de Lefschetz : géometrie
- Cycles évanescents
- La preuve.

Connaissances requises

Un cours de géométrie algébrique, notions d'algèbre homologique.

Bibliographie

[1] Les deux articles de Deligne,
[2] Le livre de Milne "Etale Cohomology"
[3] Le livre de Freitag et Kiehl "Etale cohomology and the Weil conjecture"
[4] Le livre de Kiehl et Weissauer "Weil conjectures, perverse sheaves and l-adic Fourier transform"

MOYENNISATION POUR LES EDP NON LINÉAIRES (9+9 ECTS)
Sergei Kuksin
2ème semestre

Programme

Je parlerai de l'équation complexe de Ginsburg–Landau (CGL) sur un tore :

$$\dot{u}(t,x) + a\Delta u + iV(x)u + b|u|^{2p}u = 0, \quad u(0,x) = u_0(x), \;\; x \in \mathbb{T}^d. \qquad (0.1)$$

Ici, a, b sont les nombres complexes tels que Re $a \leq 0$, Re $b \geq 0$, p est un nombre réel positif et $V(x)$ est une fonction réelle, lisse.

D'abord j'expliquerai les résultats principaux de l'existence et l'unicité de la solution $u(t, x)$ si la dimension d n'est pas grand. Après je passerai au cas perturbateur quand $b := \varepsilon b$ avec un petit ε et présenterai la théorie de moyennisation qui permet de construire la solution u pour $0 \leq t \leq \varepsilon^{-1}$. J'expliquerai la connexion de ce résultat avec la théorie de la moyennisation classique de Laplace–Lagrange–Bogolyubov.

Dans la dernière partie du cours je considèrerai la même équation (avec le b remplacé par εb), perturbée par la force aléatoire :

$$\dot{u}(t,x) + a\Delta u + iV(x)u + \varepsilon b|u|^{2p}u = \sqrt{\varepsilon}\,\frac{d}{dt}\eta^{\omega}(t,x)\,, \qquad (0.2)$$

ou $\eta^{\omega}(t, x)$ est un processus de Wiener dans l'espace fonctionnel. Je donnerai la théorie principale de cette équation (et démontrerai la moitié des résultats) et je présenterai la théorie de moyennisation stochastique pour l'équation (2), similaire de la théorie pour l'équation déterministe (1).

Le cours est basé sur la thèse [Hua14] et l'article [HKM15]. On peut trouver tous les résultats stochastiques nécessaires dans [KK15].

Bibliographie

[HKM15] G. Huang, S. Kuksin, and A. Maiocchi, *Time-averaging for weakly nonlinear CGL equations with arbitrary potentials*, Fields Institute Communications, to appear (2015), arXiv:1411.2143.

[Hua14] G. Huang, *Une théorie de la moyenne pour les équations aux derivées partielles non-linéares*, Ph.D. thesis, Ecole Polytechnique, Palaiseau, 2014.

[KK15] T. Kelai and S. Kuksin, *Introduction à l'équation de Burgers stochastique et burgulence*, preprint (2015), http://webusers.imj-prg.fr/~takfarinas.kelai/burgers.pdé