université PARIS DIDEROT PARIS 7

2013
2014

Master 2eme annee
Mathematiques Fondamentales

Responsable pedagogique : Marc Rosso

http://www.math.univ-paris-diderot.fr/formations/masters/math/m2-mathfonda

Table des matières

Cours de base 4
Cours spécialisés 4
Tableau des cours par filières 5
Les renseignements administratifs 7
Les contacts 7
Le Calendrier 2013/2014 8
L'inscription 9
Structure du Master 2 10
Modalités du contrôle des connaissances 11
Bourse et/ou logement en résidence universitaire 12
Bibliothèque, groupes de travail 12
Le Doctorat de mathématiques 13
Modalités d'inscription en thèse de doctorat à l'Université Paris Diderot 13
Le contrat doctoral 13
Programme des Cours de base 14
Représentations des groupes finis en caractéristique nulle (9 ECTS) 15
Groupes de réflexions complexes (9 ECTS) 15
Méthodes de théorie analytique des nombres (9+9 ECTS) 16
Introduction à la théorie algébrique des nombres I (Paris 6) – 9 ECTS 17
Problème de Plateau pour les hypersurfaces de l'espace euclidien (9 ECTS) 18
Analyse fonctionnelle pour les EDP (9 ECTS) 19
Théorie mathématique de la dynamique des fluides (9 ECTS) 19
Homologie (9 ECTS) 20
Fibrés et classes caractéristiques (9ECTS) 20
Compléments d'analyse : Théorie de la mesure et analyse spectrale (9 ECTS) 21
Introduction à la théorie algébrique des nombres II (9 ECTS) 22
Géométrie différentielle (9 ECTS) 23
Géométrie Non Commutative I (9 ECTS) 24
Programme des Cours spécialisés 25
Théorèmes de réductions aux quasi-simples pour les représentations des groupes finis (9 ECTS) ... 26
Variétés abéliennes (9+9 ECTS) 27
Introduction à la théorie de Deligne-Lusztig (9 ECTS) 28
Représentations de carquois et algèbres amassées (9+9 ECTS) 29
Cohomologie étale et conjectures de Weil (9+9 ECTS) 31
Variétés hamiltoniennes et quantification géométrique (9+9 ECTS) 32
Groupes algébriques (9 ECTS) 33
Espaces des Modules, Champs et Préfaisceaux Simpliciaux (9 ECTS) 34
Surfaces plates, billards polygonaux et introduction à la dynamique dans l'espace de modules. (9+9 ECTS) .. 35
Géométrie Non Commutative II (9 ECTS) 36

Cours de base (1er semestre)

Réunion d'information le **Vendredi 6 septembre 2013** à 10h en salle 1016, 1er étage du Bât. S. Germain
Début des cours le 9 septembre 2013
Cours de 4 heures hebdomadaires (sauf cas particulier), groupes de travail de 2 heures hebdomadaires.

Représentations des groupes finis en caractéristique nulle Groupes de réflexions complexes	M. BROUE (TD assurés par O. BRUNAT)
Méthodes de théorie analytique des nombres	R. DE LA BRETECHE
Problème de plateau pour les hypersurfaces de l'espace euclidien	T. DE PAUW
Analyse fonctionnelle pour les EDP Théorie mathématique de la dynamique des fluides	D. GERARD-VARET (TD assurés par D. ARSENIO)
Homologie Fibrés et classes caractéristiques	J. LANNES (TD assurés par H. MOURTADA)
Compléments d'analyse : théorie de la mesure et analyse spectrale	P. LAURAIN (TD assurés par P. LAURAIN)
Introduction à la théorie algébrique des nombres I Introduction à la théorie algébrique des nombres II	J.F. DAT (Paris 6) L. MEREL
Géométrie différentielle	G. VEZZOSI
Géométrie non commutative I	A. ZUK

Cours spécialisés (2ème semestre)

début des cours : début janvier 2014
Cours de 4 heures hebdomadaires

Théorèmes de réductions aux quasi-simples pour les représentations des groupes finis	M. CABANES
Variétés abéliennes	P-H CHAUDOUARD
Introduction à la théorie de Deligne-Lusztig	O. DUDAS
Représentations de carquois et algèbres amassées	B. KELLER
Cohomologie étale et conjectures de Weil	B. KLINGLER
Variétés hamiltoniennes et quantification géométrique	X. MA
Groupes algébriques	J. MICHEL
Espaces des modules, champs et préfaisceaux simpliciaux	G. VEZZOVI
Surfaces plates, billards polygonaux et introduction à la dynamique dans l'espace de modules	A. ZORICH
Géométrie non commutative II	A. ZUK

Tableau des cours par filières

Algèbres d'opérateurs, Géométrie non commutative :				
Géométrie non commutative I	A. ZUK	1er semestre	9 ECTS	
Géométrie non commutative II	A. ZUK	2ème semestre	9 ECTS	
Algèbre, groupes et représentations :				
Représentations des groupes finis en caractéristique nulle Groupes de réflexions complexes	M. BROUE	1er semestre	9 ECTS 9 ECTS	
Théorèmes de réductions aux quasi-simples pour les représentations des groupes finis	M. CABANES	2ème semestre	9 ECTS	
Introduction à la théorie de Deligne-Lusztig	O. DUDAS	2ème semestre	9 ECTS	
Représentations de carquois et algèbres amassées	B. KELLER	2ème semestre	9+9 ECTS	
Groupes algébriques	J. MICHEL	2ème semestre	9 ECTS	
Topologie algébrique :				
Homologie Fibrés et classes caractéristiques	J. LANNES	1er semestre	9 ECTS 9 ECTS	
Analyse, EDP :				
Analyse fonctionnelle pour les EDP Théorie mathématique de la dynamique des fluides	D. GERARD-VARET	1er semestre	9 ECTS 9 ECTS	
Compléments d'analyse : théorie de la mesure et analyse spectrale	P. LAURAIN	1er semestre	9 ECTS	
Géométrie et dynamique :				
Problème de plateau pour les hypersurfaces de l'espace euclidien	T. DE PAUW	1er semestre	9 ECTS	
Variétés hamiltoniennes et quantification géométrique	X. MA	2ème semestre	9+9 ECTS	
Géométrie différentielle	G. VEZZOSI	1er semestre	9 ECTS	
Surfaces plates, billards polygonaux et introduction à la dynamique dans l'espace de modules	A. ZORICH	2ème semestre	9+9 ECTS	
Géométrie algébrique :				
Variétés abéliennes	P-H CHAUDOUARD	2ème semestre	9+9 ECTS	
Cohomologie étale et conjectures de Weil	B. KLINGLER	2ème semestre	9+9 ECTS	
Espaces des modules, champs et préfaisceaux simpliciaux	G. VEZZOSI	2ème semestre	9 ECTS	
Théorie des nombres :				
Méthodes de théorie analytique des nombres	R. DE LA BRETECHE	1er semestre	9+9 ECTS	
Introduction à la théorie algébrique des nombres I	J.F. DAT	1er semestre	9 ECTS	UPMC
Introduction à la théorie algébrique des nombres II	L. MEREL	1er semestre	9 ECTS	

Les renseignements administratifs

Les contacts

Le responsable de la formation

Marc ROSSO
rosso@math.jussieu.fr
01 57 27 92 11
http://www.math.univ-paris-diderot.fr/formations/masters/math/m2-mathfonda

Lui écrire
Université Paris Diderot – Paris 7
UFR de Mathématiques
Bâtiment Sophie Germain
Case 7012
75205 Paris cedex 13

Le rencontrer
Site Paris Rive Gauche (13ème) - Bâtiment Sophie Germain
8 place FM/13 (en cours de nomination)
entrée au croisement de l'av. de France et de la rue Alice-Domon et Léonie-Duquet
6ème étage, bureau 6017

Le secrétariat du Master 2 Mathématiques Fondamentales

Catherine Prudlo
catherine.prudlo@univ-paris-diderot.fr
01 57 27 93 06
01 57 27 91 40

Correspondre
Université Paris Diderot – Paris 7
UFR de Mathématiques
Scolarité des Masters 2
Bâtiment Sophie Germain
Case 7012
75205 Paris cedex 13

S'y rendre
Site Paris Rive Gauche (13ème) - Bâtiment Sophie Germain
8 place FM/13 (en cours de nomination)
entrée au croisement de l'av. de France et de la rue Alice-Domon et Léonie-Duquet
5ème étage, bureau 5055

Le Calendrier 2013/2014

Septembre	Réunion d'information
6 septembre	Date limite de dépôt des dossiers de candidature
9 septembre	Début des cours du 1er semestre
15 octobre	Date limite pour l'inscription administrative auprès de la scolarité centrale (DEVU)
31 octobre	Date limite pour l'inscription pédagogique auprès du secrétariat du M2 (indication des cours suivis)
Fin octobre	Examens de la 1ère partie du 1er semestre
Fin décembre Début janvier	Session d'examen pour les cours de la 2ème partie du 1er semestre
Janvier	Début des cours du 2ème semestre et inscription pédagogique au secrétariat
Fin février	Examens de la 1ère partie du second semestre Choix du directeur de stage (convention de stage à établir en ligne)
Avril	Session d'examen pour les cours de la 2ème partie du 2ème semestre
Mai-Juin	Campagne de recrutement pour les contrats doctoraux
Juin	Session de rattrapage
30 juin	Date limite de soutenance du rapport de stage pour la session 1
Début juillet	Attribution des contrats doctoraux
30 septembre	Date limite de soutenance du rapport de stage pour la session 2

L'inscription

Conditions d'inscription

La 2ème année de Master (M2) se place normalement en 5ème année des études universitaires.
L'accès en M2 est réservé aux étudiants titulaires :

- d'un master 1, d'une maîtrise de Mathématiques
- ou d'un diplôme équivalent sanctionnant 4 années d'études universitaires (diplômes universitaires étrangers, diplôme d'ingénieur, diplôme d'une Grande Ecole,…)

Modalités d'inscription

- **Candidature des étudiants étrangers :**
  Afin de faciliter la mobilité internationale, l'Université Paris Diderot adhère à l'Agence Campus France.
  Nous invitons les étudiants à se renseigner sur le site de Campus France :
  http://www.campusfrance.org/fr et à s'inscrire auprès de cet organisme avant mars 2013.

- **Pour toutes les autres candidatures :** les étudiants doivent déposer une demande de pré-inscription sur le site web : http://sesame.univ-paris-diderot.fr

  Dates limites de préinscription sur Sésame :
  Du 1er mars au 15 juillet 2013
  Du 26 août au 15 septembre 2013

Dates de retour du dossier

- **Avant le 5 juillet 2013** pour un examen de votre dossier de candidature à la session de juillet,
- **Avant le 15 septembre 2013** pour un examen du dossier de candidature à la session de septembre.

à envoyer ou à déposer :

Envoi	Dépôt
Université Paris Diderot – Paris 7 UFR de Mathématiques Scolarité des Masters 2 Bâtiment Sophie Germain Case 7012 75205 Paris cedex 13	De 9 à 12 h et de 14 à 17 h du lundi au vendredi Site Paris Rive Gauche (13ème) Bâtiment Sophie Germain 8 place FM/13 (en cours de nomination) entrée au croisement de l'av. de France et de la rue Alice-Domon et Léonie-Duquet 5ème étage, bureau 5055

Inscription administrative

Dans le cas d'une réponse favorable, l'étudiant recevra une lettre d'acceptation et devra prendre rendez-vous par l'intermédiaire du site web Sésame en vue de l'inscription administrative auprès de la Direction des Etudes et de la Vie Universitaire (DEVU). Il devra se munir de toutes les pièces justificatives mentionnées sur la lettre, de 2 photos et d'un moyen de paiement (chèque, mandat-carte, etc…)

Date limite d'inscription administrative : 15 octobre 2013

Structure du Master 2

Partie théorique	• Une UE Fondamentale constituée de cours de base 9+9 ECTS (1er semestre) • Une UE d'orientation constituée de cours spécialisés 9+9 ECTS (2ème semestre)
Partie pratique	• Une UE de stage - 18 ECTS - sous la direction d'un enseignant ou chercheur d'un laboratoire associé : lecture et résumé d'articles de recherche récents, rédaction d'un mémoire, ou d'un cours...
UE d'ouverture	• Une UE d'ouverture - 6 ECTS - (au 1er ou 2ème semestre)

Les cours de 9+9 ECTS sont enseignés pendant tout le semestre sur une base de 4 heures par semaine. Un examen au milieu du semestre permet de valider la moitié du cours (9 ECTS).

Les cours de 9 ECTS sont en général enseignés pendant la moitié du semestre sur une base de 4 heures par semaine. Certains cours de 9 ECTS sont enseignés pendant tout le semestre sur une base de 2 heures par semaine.

Le choix des cours

- **Les cours de base** doivent être choisis dans la liste des cours du M2 « Mathématiques Fondamentales ». Ils sont soutenus par un groupe de travail dont les activités concourent à l'assimilation du cours de base et à la préparation de l'examen qui le sanctionne.

- **Les cours spécialisés** sont pris en principe dans la liste des cours spécialisés du M2 de Mathématiques Fondamentales.

  Ils peuvent également être choisis parmi les cours de M2 extérieurs, sous réserve de l'accord préalable du responsable du M2, et à condition de correspondre au même volume horaire.
  Voici une liste non restrictive de M2 extérieurs possibles :

  - M2 Mathématiques Fondamentales à Paris 6
  - M2 Mathématiques Pures à Paris 11
  - M2 Mathématiques à Paris 13

  Il existe d'autres possibilités parmi divers cours de M2 de la région parisienne.

- **L'unité d'ouverture** correspond à des activités complémentaires choisies en accord avec le responsable du M2. Parmi les possibilités : exposé oral et/ou écrit dans le cadre d'un groupe de travail, rapport écrit et/ou oral ou séminaire « extérieur », etc…

L'étudiant devra informer régulièrement le Secrétariat du M2 de l'UFR de Mathématiques de ses choix (cours de base, cours spécialisé, directeur de stage, demande d'allocation de recherches,…). Il devra particulièrement le faire en début de second semestre pour l'indication des cours spécialisés, de l'unité d'ouverture et du directeur de stage.

Modalités du contrôle des connaissances

Pour obtenir le diplôme de Master, l'étudiant doit être reçu à chacune des quatre épreuves composant son diplôme, soit :

Partie théorique	Partie pratique	Ouverture
UE fondamentale 9 + 9 ECTS	Stage 18 ECTS	UE d'ouverture 6 ECTS
UE d'orientation 9 + 9 ECTS		

Chaque cours de la **partie théorique** est sanctionné par des épreuves écrites, de 3 heures, accompagnées, le cas échéant, si la note d'écrit, sur 20, est ≥ 8, et < 10, d'un oral de rattrapage.
Pour chaque cours, la note finale est donnée sur 20.
Seules sont prises en compte dans cette évaluation les UE pour lesquelles la note obtenue est ≥ 10.

Les dates et les horaires des **examens** sont affichés au 5ème étage du bâtiment Sophie Germain, à gauche lorsque l'on sort du palier des ascenseurs. Ils sont également disponibles sur le site du M2, un mois auparavant. Il n'y a pas de convocation individuelle.

Le stage (en général d'une durée de 3 mois) donne lieu :

- à la rédaction d'un mémoire
- à une soutenance orale devant un collège comprenant au moins 2 membres habilités à diriger des recherches.

Il fait l'objet d'un rapport du directeur de stage et est sanctionné par une note sur 20.

La soutenance doit :

- Se dérouler avant le 30 juin pour une prise en compte de la note en session 1 ;
- Se dérouler avant le 30 septembre pour une prise en compte de la note en session 2.

Le M2 est délivré avec pour note globale la « moyenne pondérée » des notes obtenues dans chacune des catégories d'UE ci-dessus. Dans chaque catégorie, seules sont conservées pour le calcul, des notes correspondant au nombre d'ECTS requis. La note globale est sur 20.

Bourse et/ou logement en résidence universitaire

Le ministère chargé de l'Enseignement supérieur accorde aux étudiants un certain nombre d'aides gérées par le Crous, en lien avec les universités : bourses sur les critères sociaux, aide d'urgence annuelle, passeport de mobilité, prêts d'honneur, l'aide au mérite…

Pour de plus amples informations, vous devez prendre contact avec :

- le service social de l'Université Paris Diderot :
http://www.univ-paris-diderot.fr/sc/site.php?bc=vie_etudiante&np=Aides

- le CNOUS : http://www.cnous.fr

Bibliothèque, groupes de travail

Bibliothèque

La bibliothèque Mathématiques Informatique Recherche : http://www.biblio.math.jussieu.fr située dans le bâtiment Sophie Germain, 8ème étage, Place FM/13, 75013 Paris est à la disposition des étudiants du M2.

Groupes de travail

Des groupes de travail et séminaires d'initiation à la recherche sont organisés dans certains domaines et les étudiants sont vivement invités à y participer.

Ecoles d'été

Les étudiants peuvent être amenés à suivre d'autres activités d'initiation à la recherche : écoles d'été, congrès, séminaires…

Le Doctorat de mathématiques

Le doctorat débute normalement en 6ème année des études universitaires et s'adresse aux étudiants titulaires d'un M2 ou d'un titre de niveau équivalent.

La durée conseillée des études doctorales est de 3 ans.
Une année supplémentaire peut être accordée après examen du dossier (incluant un rapport du directeur de thèse prouvant l'avancement des travaux) et autorisation du Directeur de thèse, du Directeur de l'Ecole Doctorale et du Président de l'Université.

Modalités d'inscription en thèse de doctorat à l'Université Paris Diderot

Les étudiants titulaires du M2 peuvent, l'année suivante, s'inscrire en Diplôme de Doctorat de Mathématiques après avoir au préalable obtenu l'accord d'un Directeur de recherche et du Directeur de l'Ecole Doctorale. Afin de candidater pour une inscription en doctorat, ils devront se connecter sur le site web suivant : http://sesame.univ-paris-diderot.fr

Pour l'examen de leurs demandes, les étudiants devront déposer auprès du Bureau de l'Ecole Doctorale (Bureau 5056) de juin à octobre environ, les documents suivants :

- Une lettre exposant la nature de la recherche envisagée et le projet de thèse,
- Un curriculum vitae détaillé,
- Une lettre de recommandation rédigée par l'enseignant du M2 (ce point ne concerne pas les étudiants qui ont obtenus le M2 à Paris 7)
- Le détail des résultats obtenus en M2 (aux examens et au stage, avec indication des enseignants et des intitulés correspondants)
- L'attestation de M2 (provisoire ou définitive) délivrée par l'université d'origine
- L'attestation de financement

A titre indicatif pour l'année 2013-2014 :
- Date limite de dépôts des dossiers de préinscription en doctorat : 15 novembre 2013
- Date limite des inscriptions administratives : 15 décembre 2013

Le contrat doctoral

Le dossier de candidature est à remettre au secrétariat de l'Ecole Doctorale de Paris Centre avant la mi-juin 2014 (bâtiment Sophie Germain, 5ème étage, bureau 5056 pour les candidatures de Paris Diderot).

Les résultats des attributions des contrats doctoraux seront annoncés début juillet 2014.

Programme des Cours de base

MICHEL BROUE - TD : OLIVIER BRUNAT

Première partie :

Représentations des groupes finis en caractéristique nulle (9 ECTS)

Programme

Théorème de Brauer

Bibliographie

[1] Serre : Représentations linéaires des groupes finis.

Deuxième partie :

Groupes de réflexions complexes (9 ECTS)

Programme

- Modules gradués
- Théorie des invariants
- Classification des groupes engendrés par des réflexions
- Classification de Shepard-Todd
- Groupes de Coxeter finis
- Algèbres de Hecke

REGIS DE LA BRETECHE

Méthodes de théorie analytique des nombres (9+9 ECTS)

Programme

- Fonctions arithmétiques, convolutions, méthode de l'hyperbole et premiers résultats sur les fonctions sommatoires
- Théorème des nombres via la méthode d'analyse complexe : formule d'Hadamard, formules de Perron,...
- Résultats de crible : crible de Brun, de Selberg grand crible, théorème de Bombieri Vinogradov
- Introduction à la théorie probabiliste des nombres : inégalité de Turan Kubilius et applications (Théorème de Daboussi, th de Delande, th d'Erods Wintner, taille du j eme facteur premier)

Bibliographie

[1] Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres de Tenenbaum (+ livre d'exos associés)
[2] Introduction à la théorie analytique des nombres (Iwaniec Kowalski)
[3] Multiplicative number theory (Davenport, édition complétée par Heath-Brown)
[4] Opera de cribro (Iwaniec Friedlander)

JEAN-FRANÇOIS DAT

Introduction à la théorie algébrique des nombres I (Paris 6) – 9 ECTS

Présentation

Les objets principaux de ce cours sont les corps de nombres, i.e. les extensions finies de Q, et leurs anneaux d'entiers. Contrairement à Z, ces derniers ne sont généralement pas principaux, et n'ont pas la propriété d'unique factorisation. Cependant, on verra que leurs idéaux inversibles possèdent, eux, une propriété d'unique factorisation, et que l'analogue correct d'un "nombre premier" est la notion « d'idéal premier ».

Du point de vue algébrique, les idéaux premiers sont les générateurs naturels du groupe des idéaux inversibles de l'anneau d'entiers. Nous verrons comment décomposer l'idéal engendré par un nombre premier en produit d'idéaux premiers, introduirons les notions de ramification et de déploiement, et l'effet de l'action du groupe de Galois, lorsque le corps de nombres est Galoisien. Les idéaux premiers engendrent aussi le "groupe de classes", un invariant très important qui mesure le défaut de principalité. Nous montrerons la finitude de ce groupe de classes.

D'un point de vue plus analytique, les idéaux premiers correspondent aux valeurs absolues "non-archimédiennes" du corps. Nous étudierons les complétions des corps de nombres pour de telles valeurs absolues, qui sont des extensions finies d'un corps Qp de nombres p-adiques. On expliquera les implications algébriques et analytiques du lemme de Hensel.

Si le temps le permet, on introduira l'anneau des adèles et on discutera ses propriétés.

Programme

Exemples : corps quadratiques, corps cyclotomiques.
Anneaux de Dedekind (factorisation des idéaux, exemples)
Finitude du nombre de classes et théorème des unités de Dirichlet.
Groupes de décomposition, d'inertie, de ramification.
Complétions algébrique et analytique, corps p-adiques.

Connaissances requises

Une certaine familiarité avec les notions fondamentales d'algèbre commutative (localisation, anneaux noetheriens, artiniens, semi-locaux) sera bienvenue.

Bibliographie

[1] L. Merel. Nombres algébriques et nombres p-adiques. http://www.institut.math.jussieu.fr/~merel/TAN.pdf
[2] J. Milne. Algebraic Number Theory. http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/math676.pdf
[3] J. Neukirch. Algebraic Number Theory. Springer, 2009
[4] J.P. Serre. Corps locaux. Hermann, 1968

THIERRY DE PAUW

Problème de Plateau pour les hypersurfaces de l'espace euclidien (9 ECTS)

(à partir du mois de novembre)

Le but de ce cours est d'introduire les outils classiques de théorie géométrique de la mesure tels qu'ils s'appliquent à démontrer l'existence de solutions au problème de Plateau pour des hypersurfaces de l'espace eucliden. Le problème variationnel en question consiste à trouver une hypersurface ayant un bord donné, et minimisant son aire parmi toutes celles-là. Le cadre dans lequel on étudiera la question est celui des ensembles à périmètre fini, introduit par E. De Giorgi. Ce faisant, on s'intéressera également à la théorie de la rectifiabilité.

Programme

- Théorèmes de recouvrement de Vitali et de Besicovitch; calcul de dérivées de Radon-Nikodym de mesures de Radon dans l'espace euclidien
- Théorème de Rademacher (dérivation presque partout des fonctions lipschitziennes).
- Mesures de Hausdorff, propositions élémentaires, densités
- Formule de l'aire, jacobiens
- Ensembles et mesures rectifiables; mesures m-tangentes, existence
- Théorème de rectifiabilité : une mesure est rectifiable ssi presque partout elle admet une unique mesure tangente plate
- Fonctions à variation bornée et ensembles à périmètre fini; semi-continuité inférieure et compacité
- Théorème (De Giorgi) : rectifiabilité de la frontière réduite
- Problème de Plateau : existence
- Enfin, on dira quelques mots de la régularité des solutions

DAVID GERARD-VARET (TD : DIOGO ARSENIO)

Première partie :

Analyse fonctionnelle pour les EDP (9 ECTS)

Programme

- Espaces réflexifs, séparables. Compacité faible et faible *.
- Espaces de Sobolev
- Fonctions harmoniques.
- Equations elliptiques linéaires : résolution, régularité des solutions.
- Propriétés qualitatives des principales EDP d'évolution : chaleur, ondes, équation de Burgers.

Deuxième partie :

Théorie mathématique de la dynamique des fluides (9 ECTS)

Programme

- Exemples d'EDP d'évolution en dynamique des fluides: équations d'Euler et Navier-Stokes.

- Théorie des solutions régulières
  - Théorèmes de compacité en dimension infinie : Ascoli, Aubin-Lions.
  - Méthodes d'énergie. Construction d'un flot local en temps pour les équations d'Euler et Navier-Stokes.
  - Critère d'explosion en temps fini : théorème de Beale-Kato-Majda.

- Théorie des solutions irrégulières
  - Solutions de l'équation d'Euler bidimensionnelle : théorème de Yudovitch.
  - Solutions turbulentes de l'équation de Navier-Stokes : théorème de Leray.

JEAN LANNES

Première partie :

Homologie (9 ECTS)

On exposera brièvement les fondements de la théorie de l'homologie singulière. On décrira ensuite ses structures et quelques-unes de ses applications.

Programme

- Fondements de la théorie l'homologie singulière, premières applications
- Homologie des groupes
- Opérations cohomologiques
- Illustrations : cup-produits et intersection (dualité de Poincaré), applications à la théorie de l'homotopie, suite spectrale d'Adams, . . .

Deuxième partie :

Fibrés et classes caractéristiques (9ECTS)

On exposera la théorie des fibrés vectoriels, des fibrés principaux et des classes caractéristiques. Le coronidis loco pourrait être l'exhibition de la sphère exotique de Milnor.

Programme

- Fibrés vectoriels
- Fibrés principaux, classification
- Classes de Stiefel-Whitney et de Chern à la Grothendieck,
- Classes de Stiefel-Whitney en termes d'opérations de Steenrod
- Classes caractéristiques pour les fibrés principaux, retour sur l'homologie des groupes
- Invariants de cobordisme (nombres caractéristiques)
- La sphère exotique de Milnor

PAUL LAURAIN

Compléments d'analyse :
Théorie de la mesure et analyse spectrale (9 ECTS)

Ce cours en complément de "Analyse fonctionnelle pour les EDP" se propose de donner des bases solides en analyse en vue des cours plus approfondis. Il ne nécessite aucun prérequis particulier, si ce n'est les notions d'analyse fonctionnelle du cours suscité et des notions élémentaire de géométrie différentielle.

Programme

- Rappel de théorie de la mesure, construction de la mesure Lebesgue et mesure de Hausdorff
- Theorème de Riesz, Radon-Nikodym et quelques conséquences
- Espace de Hilbert, opérateur compacts et théorie de Fredholm
- Théorie de Morse sur des espaces de Banach
- Décomposition spectrale de opérateurs auto-adjoints
- Théorie élémentaire des algèbres de Banach, C*-algèbres et introduction à la théorie de Gelfand

LOÏC MEREL

Introduction à la théorie algébrique des nombres II (9 ECTS)

(à partir du mois de novembre)

Il s'agit d'un cours qui fait suite au cours d'introduction de Jean-François Dat, introduction à la théorie algébrique des nombres I, à l'UPMC.

Programme

Le début du cours sera consacré à la formule du nombre de classes de Dirichlet. Ensuite, on montrera le théorème de la progression arithmétique et le théorème de Chebotarev, avec des outils élémentaires, sans utiliser la théorie du corps de classe.
Enfin on abordera vers la cohomologie galoisienne (dualité, groupe de Brauer) et la théorie du corps de classe.

Connaissances requises

On supposera connu l'essentiel du livre de P. Samuel : Théorie algébrique des nombres.

GABRIELLE VEZZOSI

Géométrie différentielle (9 ECTS)

Programme

- Varietés différentiables,
- Calcul différentiel sur les variétes,
- Cohomologie de de Rham,
- Théorème de de Rham

Connaissances requises

Topologie générale, fonctions de plusieurs variables

Bibliographie

[1] Lee, Introduction to smooth manifolds

[2] Milnor, Introduction to differential topology,

[3] Hirsch, Differential topology

ANDRZEJ ZUK

Géométrie Non Commutative I (9 ECTS)

(à partir du mois de novembre)

Le but de la géométrie non commutative est d'utiliser des outils de la géométrie différentielle pour l'étude de certaines algèbres non commutatives, qui apparaissent naturellement à la fois en mathématique et en physique. Nous étudierons particulièrement l'espace non commutatif dual d'un groupe non abélien.

Programme

On commencera par les bases de la théorie des algèbres d'opérateurs. On présentera les notions et théorèmes de base dus à Von Neumann, Gelfand ainsi que d'autres mathématiciens.

Théorie spectrale **:**
- Algèbres de Banach, spectre, transformée de Gelfand.
- C* algèbres commutatives, opérateurs auto-adjoints sur un espace de Hilbert.

C* algèbres :
- Construction GNS.
- C*-algèbre d'un groupe discret.
- Moyennabilité et nucléarité. Simplicité, exactitude.

Bibliographie

[1] A. Connes : Noncommutative Geometry, disponible sur http://www.alainconnes.org/docs/book94bigpdf.pdf

[2] V.F.R. Jones : Von Neumann algebras, Notes de cours, disponible sur http://www.math.berkeley.edu/~vfr/VonNeumann.pdf

Des références bibliographiques ponctuelles seront en outre données pendant le cours.

Programme des Cours spécialisés

MARC CABANES

Théorèmes de réductions aux quasi-simples pour les représentations des groupes finis (9 ECTS)

Le cours se propose de donner les méthodes introduites récemment dans l'étude de certaines conjectures ``global/local'' (conjecture de McKay 1970, weight conjecture d'Alperin 1986) en théorie des représentations des groupes finis. En particulier, je montrerai comment on réduit ces deux conjectures à des énoncés sur des groupes finis quasi-simples (Isaacs-Malle-Navarro-Tiep). Je terminerai par l'exemple des groupes de type de Lie en caractéristique naturelle.

Programme

- extensions centrales,
- chief factors,
- aperçus sur la classification des groupes finis simples,
- théorie de Clifford,
- conjectures de McKay et d'Alperin, théorèmes de réduction,
- modules d'endo-permutation,
- groupes à BN-paires

Connaissances requises

Théorie des caractères des groupes finis, théorie des modules (1er chapitre de Benson), si possible : groupes de Coxeter.

Bibliographie

Livres :

[1] D. Benson, Representations and Cohomology I : Basic Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras, Cambridge, 1991.

[2] H. Nagao and Y. Tsushima, Representations of Finite Groups, Academic, 1989.

[3] J. Thévenaz, G-Algebas and modular representation theory, Oxford, 1995.

[4] M. Cabanes and M. Enguehard, Representation Theory of finite reductive groups, Cambridge, 2004.

Articles :

[1] Isaacs, I.M., Malle, G., Navarro, G.: A reduction theorem for the McKay conjecture. Invent. Math. 170, 33–101 (2007)

[2] Navarro, G., Tiep, P. : A reduction theorem for the Alperin weight conjecture. Invent.Math. 184, 529–565 (2011)

PIERRE-HENRI CHAUDOUARD

Variétés abéliennes (9+9 ECTS)

Programme

- Fonctions holomorphes de plusieurs variables
  Cohomologie des faisceaux Résolutions classiques (De Rham, Dolbeault, Cech)
- Tores complexes
  - Cohomologie des tores complexes
  - Fibrés en droites sur les tores complexes
  - Fonction theta

  Cohomologie des fibrés en droite et théorème de Riemann-Roch
- Variétés abéliennes complexes
  - Caractérisation
  - Variétés abéliennes duales
  - Anneau d'endomorphismes
  - Espace de Siegel
- Variétés Jacobiennes
  - Puissances symétriques de courbes
  - Application d'Abel-Jacobi
  - Autodualité
- Transformation de Fourier-Mukai
  - Fibré de Poincaré
  - Equivalence de Fourier-Mukai
  - Application aux fibrés vectoriels homogènes

Connaissances requises

Un cours de base en géométrie algébrique.

Bibliographie

[1] O. Debarre : Tores et variétés abéliennes complexes ; SMF, 1999.

[2] R. Godement : Topologie algébrique et théorie des faisceaux

[3] Griffith, Harris : Principles of algebraic geometry

[4] H. Lange, C. Birkenhake : Complex Abelian Varieties. Springer 2004.

[5] D. Mumford : Abelian varieties. Oxford UP, 1970.

[6] D. Mumford : Tata lectures on theta I,II,III. Birkhäuser 2007

[7] A. Polishchuk : Abelian Varieties, Theta Functions and the Fourier Transform. Cambridge University Press 2003.

[8] C. Voisin : Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe, SMF.

OLIVIER DUDAS

Introduction à la théorie de Deligne-Lusztig (9 ECTS)

(à partir du mois de mars)

L'objet de ce cours est la construction géométrique des représentations des groupes réductifs finis, tels que $GL_n(q)$, $Sp_{2n}(q)$, ..., $E_8(q)$.

Programme

- l'étude des variétés de drapeaux et des variétés de Schubert,
- les variétés de Deligne-Lusztig (propriétés géométriques élémentaires et descriptions explicites pour quelques cas dans GLn),
- la cohomologie l-adique et la formule des traces,
- les caractères unipotents et le lien avec les algèbres de Hecke par la formule du caractère,
- les calculs explicites de cohomologie, notamment pour SL_2,

Et si le temps le permet, conjectures pour les éléments réguliers, et lien avec la conjecture du défaut abélien.

BERNHARD KELLER

Représentations de carquois et algèbres amassées (9+9 ECTS)

Un carquois est un graphe orienté. Une représentation d'un carquois Q sur un corps k est un diagramme de k-espaces vectoriels qui a la forme indiquée par Q. Les représentations de carquois interviennent dans de nombreux problèmes d'algèbre linéaire et de théorie des représentations (voir [3], [8]). En particulier, ils ont des liens étroits avec la théorie des représentations des algèbres de Lie de dimension finie et infinie et avec les algèbres amassés de Fomin-Zelevinsky. Dans ce cours, nous présenterons les théorèmes de Gabriel et de Kac, puis nous étudierons la théorie d'Auslander-Reiten. Nous donnerons ensuite des applications à la théorie des algèbres amassées.

Programme

- Rappels et compléments de géométrie algébrique. Variétés affines, groupes algébriques linéaires, actions de groupes réductifs sur des variétés affines.
- Le théorème de Gabriel. [7] Carquois, carquois avec relations, représentations, groupes d'extensions, variétés de représentations, forme de Tits, racines, diagrammes de Dynkin et carquois de représentation finie.
- Le théorème de Kac. [9] Carquois et matrices de Cartan, groupe de Weyl, racines réelles, racines imaginaires, démonstration du théorème principal en caractéristique finie puis en caractéristique nulle.
- La théorie d'Auslander-Reiten. [2], [8] Le point de vue fonctoriel, couvertures projectives de foncteurs de type fini, le théorème d'Auslander-Reiten, propriétés des suites presque scindées, la translation d'Auslander-Reiten, le carquois d'Auslander-Reiten, composantes postprojectives.
- Application aux algèbres amassées. [6], [10], [5] Introduction aux algèbres amassées, algèbres amas-finies, l'application de Caldero–Chapoton (cas des carquois de Dynkin, cas des carquois acycliques), la catégorie dérivée et la catégorie amassée, interprétation des amas, carquois à potentiel et algèbres jacobiennes, mutations, l'application de Caldero–Chapoton dans le cas général.

Connaissances requises

Connaissances générales du M1, notions de géométrie algébrique, notions sur les groupes et algèbres de Lie.

Bibliographie

[1] Ibrahim Assem, Daniel Simson, and Andrzej Skowron´ski, Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1, London Mathematical Society Student Texts, vol. 65, Cambridge University Press, Cambridge, 2006, Techniques of representation theory.

[2] M. Auslander, I. Reiten, S. Smalø, Representation theory of Artin algebras, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 36. Cambridge University Press, Cambridge, 1997

[3] D. J. Benson, Representations and Cohomology I : Basic representation theory of finite groups and associative algebras, Cambridge Univ. Press, 1991.

[4] Harm Derksen, Jerzy Weyman, and Andrei Zelevinsky, Quivers with potentials and their representations I : Mutations, Selecta Mathematica 14 (2008), 59–119.

[5] Harm Derksen, Jerzy Weyman, and Andrei Zelevinsky, Quivers with potentials and their representations II : Applications to cluster algebras, J. Amer. Math. Soc. 23 (2010), 749–790.

[6] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky, Cluster algebras. I. Foundations, J. Amer. Math. Soc. 15 (2002), no. 2, 497–529 (electronic).

[7] P. Gabriel, Unzerlegbare Darstellungen I, Manuscripta Mathematica 6 (1972), 71–103.

[8] P. Gabriel, A. V. Roiter, Representations of finite-dimensional algebras, Enc. of Math. Sci., 73, Algebra VIII, Springer 1992.

[9] V. Kac, Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory, Invent. Math. 56 (1980), 57–92.

[10] Bernhard Keller, Cluster algebras, quiver representations and triangulated categories, Triangulated categories (Thorsten Holm, Peter Jørgensen, and Raphaël Rouquier, eds.), London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 375, Cambridge University Press, 2010, pp. 76– 160.

[11] C. M. Ringel, Tame algebras and integral quadratic forms, Lecture Notes in Mathematics, 1099. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

BRUNO KLINGLER

Cohomologie étale et conjectures de Weil (9+9 ECTS)

Programme

Partie I : cohomologie étale:

- morphismes étales
- le site étale
- faisceaux sur le site etale, leur cohomologie, catégorie dérivée des faisceaux, image directe supérieure
- pureté
- changement de base propre et lisse

Partie II : conjectures de Weil

- fonctions zetas
- formule des traces de Lefschetz
- pinceaux de Lefschetz : géometrie
- cycles évanescents
- la preuve.

Connaissances requises

Un cours de géométrie algébrique, notions d'algèbre homologique

Bibliographie

[1] les deux articles de Deligne,

[2] Milne "Etale Cohomology",

[3] Freitag et Kiehl "Etale cohomology and the Weil conjecture",

[4] Kiehl et Weissauer "Weil conjectures, perverse sheaves and l-adic Fourier transform"

XIAONAN MA

Variétés hamiltoniennes et quantification géométrique (9+9 ECTS)

Programme

- Variétés symplectiques, Variétés Hamiltoniennes, Définitions
- Théorème de Darboux
- L'application moment et réduction symplectique
- Exemples de réduction symplectique : variétés torique et polytope de Delzant, l'espace de module de G-fibrés principaux plats sur une surface de Riemann compacte.
- Convexité de l'application moment.
- Application moment et orbites fermées pour l'action d'un groupe réductif complexe.
- Cohomologie équivariante et classes caractéristiques,
- La formule de localisation de Duistermaat-Heckman et Berline-Vergne
- Image de la mesure de Liouville par l'application moment et volumes des espaces réduits.
- Préquantification, action et moment,
  Exemple 1: variétés toriques
  Exemple 2: Théorème de Borel-Weil-Bott sur la réalisation géométrique de représentation irréductible d'un groupe de Lie compact connexe
- Opérateur de Dirac spin^c
- Quantification géométrique
- Quantification commute à la réduction symplectique

Connaissances requises

Variétés différentielles

Bibliographie

[1] M. Audin, Torus actions on symplectic manifolds, revised ed., Progress in Mathematics, vol. 93, Birkhäuser Verlag, Basel, 2004.
[2] V. Guillemin, Moment maps and combinatorial invariants of Hamiltonian T^n-spaces. Progress in Mathematics, 122. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1994. viii+150 pp.
[3] V. Guillemin, S. Sternberg, Symplectic techniques in physics. Second edition. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. xii+468 pp.
[4] M. Vergne, Variétés hamiltoniennes et Application moment, Notes de cours de DEA, Paris. http://people.math.jussieu.fr/~vergne/
[5] M. Vergne, Quantification géométrique et réduction symplectique. Séminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001. Astérisque No. 282 (2002), 249-278.

JEAN MICHEL

Groupes algébriques (9 ECTS)

Ce cours prendra la suite du cours de F. Loeser à l'UPMC qui en sera le pré-requis, et sera lui-même un pré-requis du cours de O. Dudas sur la théorie de Deligne-Lusztig.

Programme

- Sur la structure des groupes algébriques sur un corps algébriquement clos: BN-paire associée à un groupe réductif, sous-groupes de Levi, parties closes et quasi-closes des racines, Intersection de sous-groupes paraboliques, présentation de Chevalley-Steinberg. Théorème disant qu'une isogénie correspond à un p-morphisme de données radicielles.

- Des questions de rationalité, essentiellement l'existence d'une BN-paire rationelle. Dans le cas d'un automorphisme de Frobenius, le théorème de Lang-Steinberg et ses conséquences.

- Une introduction à la théorie des représentations complexes d'un groupe réductif fini, essentiellement la théorie de Harish-Chandra et la dualité de Curtis-Alvis.

Bibliographie

[1] T.A. Springer, Linear algebraic groups, 2nd edition, progress in mathematics Volume 9, Birkhauser 1998.

[2] F. Digne et J. Michel, Representations of finite groups of Lie type, London Mathematical Society Student Texts volume 21, Cambridge University Press 1991.

GABRIELLE VEZZOSI

Espaces des Modules, Champs et Préfaisceaux Simpliciaux (9 ECTS)

Programme

- problèmes de modules et exemples,
- catégories des modèles,
- groupoides et ensembles simpliciaux,
- champs en groupoides et exemples,
- préfaisceaux simpliciaux,
- champs supérieurs et exemples

Connaissances requises

Théorie des schémas, connaissances élémentaires des catégories et foncteurs.

ANTON ZORICH

Surfaces plates, billards polygonaux et introduction à la dynamique dans l'espace de modules. (9+9 ECTS)

Programme

- Introduction
  Billards dans les polygones versus flot géodésique sur les surfaces plates. Billards dans les polygones rationnels versus feuilletages mesurés. Problème de Novikov (trajectoires d'un électron sur une surface de Fermi en présence d'un champ magnétique homogène.) Théorème de Calabi.

  Familles de surfaces plates versus espaces de modules de différentielles holomorphes. Elément de volume dans l'espace de modules. Ergodicité de l'action de SL(2,R) (sans démonstration). Flot géodésique de Teichmuller. Critère de Masur.

  L'énoncé du résultat de Eskin-Mirzakhani-Mohammadi (analogue du théorème de Ratner pour l'action du groupe parabolique sur l'espace de modules). Problème de classification de sous-variétés invariantes.

- Exposants de Lyapunov du fibré de Hodge
  Fibré de Hodge. Connexion de Gauss-Manin. Théorème ergodique et théorème ergodique multiplicatif. Exposants de Lyapunov. Formule de Kontsevich.

  Surfaces à petits carreaux. Courbes de Teichmuller arithmétiques. Revêtements cycliques et exemple ludique de variations de structure de Hodge. Esquisse de calcul de degré d'un sous-fibré du fibré de Hodge dans le contexte d'une famille de revêtements cycliques. L'idée du théorème de Bouw-Moeller. Application: modèle "wind-tree" (d'après Avila-Delecroix-Hubert-Lelièvre).

- Constantes de Siegel-Veech et volumes des espaces de modules
  Géodésiques fermées sur une surface de translation. Problèmes de comptage. Formule de Siegel-Veech. Bord principal de l'espace de modules des différentielles holomorphes et des différentielles quadratiques. Evaluation des constantes de Siegel-Veech. Volumes de strates (d'après Eskin-Okounkov-Pandharipande et Athreya-Eskin-Zorich).

ANDRZEJ ZUK

Géométrie Non Commutative II (9 ECTS)

On exposera les développements tout récents en relation avec les progrès remarquables en ce qui concerne la théorie de groupes.

Programme

- Algèbres de von Neumann :

  - Topologie faible, théorème du bicommutant, décomposition polaire.
  - Algèbre de von Neumann d'un groupe discret.
  - Facteurs de type II_1, dimension continue.
  - Classification

- Théorie des groupes :

  - La propriété (T)
  - La conjecture de Baum-Connes
  - La conjecture de Dixmier

Bibliographie

[1] A. Connes : Noncommutative Geometry, disponible sur http://www.alainconnes.org/docs/book94bigpdf.pdf

[2] V.F.R. Jones : Von Neumann algebras, Notes de cours, disponible sur http://www.math.berkeley.edu/~vfr/VonNeumann.pdf

Des références bibliographiques ponctuelles seront en outre données pendant le cours.