

9 Équations différentielles

Ici, la référence de base (en plus des classiques...) est [Demailly].

Une équation différentielle (scalaire, d'ordre n) est une équation du type $f(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0$. L'inconnue est une fonction x définie sur un intervalle de \mathbb{R} et à valeurs scalaires (\mathbb{R} ou \mathbb{C}). Quitte à étudier les équations différentielles vectorielles *i.e.* x est à valeurs dans \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n , on peut toujours se ramener au cas des équations d'ordre 1. On peut aussi en général, à l'aide du théorème des fonctions implicites, se ramener à des équations différentielles du type $X' = f(t, X)$.

Le *problème de Cauchy* pour une telle équation consiste à trouver « la » solution X définie sur un intervalle J le plus grand possible satisfaisant aux *données initiales* $X(t_0) = X_0$

En physique, en chimie, en économie, ... plusieurs phénomènes sont décrits à l'aide d'équations différentielles. Le *théorème de Cauchy-Lipschitz* qui affirme l'existence et unicité de la solution du problème de Cauchy, dit que ces équations différentielles déterminent bien le phénomène : si on connaît l'équation différentielle et les données initiales on a déterminé toute l'évolution de notre système.

On dispose de méthodes générales pour « résoudre » plusieurs équations différentielles, *i.e.* pour exprimer les solutions à l'aide de fonctions usuelles. Une autre étude, l'étude dite qualitative, peut-être plus intéressante encore - que nous n'aborderons ici que dans des exemples - consiste à étudier les solutions d'une équation différentielle, sans pour autant pouvoir les exprimer.

9.1 Équations différentielles linéaires

9.1.1 Théorème d'existence et unicité

Un système d'équations différentielles linéaires est une équation de la forme

$$X' = A(t)X + B(t), \tag{E}$$

où A (*resp.* B) est une application continue d'un intervalle I dans $M_n(\mathbb{C})$ (*resp.* \mathbb{C}^n). Une solution de ce système est une fonction $X : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ de classe C^1 et telle que, pour tout $t \in I$ on ait $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$.

Théorème de « Cauchy-Lipschitz linéaire » (Existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy). *Pour tout $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathbb{C}^n$, il existe une et une seule solution $X : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ de l'équation (E) telle que $X(t_0) = X_0$.*

L'équation homogène associée à (E) est

$$X' = A(t)X. \tag{H}$$

L'ensemble S_H des solutions sur I de (H) est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 de I dans \mathbb{C}^n . D'après le théorème d'existence et d'unicité, pour $t_0 \in I$, l'application $X \mapsto X(t_0)$ est un isomorphisme de S_H sur \mathbb{C}^n , donc $\dim S_H = n$.

L'ensemble S_E des solutions de (E) est un espace affine de direction S_H . Pour résoudre une équation différentielle du type (E), on doit donc résoudre (H) et trouver une solution particulière de (E) : la solution générale de (E) est somme de la solution générale de (H) et d'une solution particulière de (E).

Application. Soient a , b , c des fonctions continues sur un intervalle I et à valeurs complexes. Considérons l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t) \tag{E2}$$

dont l'inconnue est une fonction $x : I \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^2 . On se ramène à un système du premier ordre en posant $y = x'$ et en résolvant donc le système

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -a(t) & -b(t) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c(t) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (E')$$

On en déduit donc un théorème d'existence et unicité du problème de Cauchy correspondant :
pour tout $t_0 \in I$, tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2$ il existe une unique fonction $x : I \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^2 telle que $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = y_0$ et, pour tout $t \in I$, on ait $x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t)$.

9.1.2 Méthode de la variation des constantes

Supposons que l'on ait résolu (H) et que l'on cherche à résoudre (E) . On dispose donc d'une base de solutions (X_1, \dots, X_n) de (H) . Les solutions de (H) sont donc de la forme $X = \sum y_i X_i$ où les y_i sont des constantes. La méthode de variation des constantes consiste à considérer les y_i comme des fonctions.

Pour tout $t \in I$, notons $R(t)$ la matrice carrée dont les vecteurs colonnes sont les $X_i(t)$. Remarquons que, pour tout $t \in I$, comme l'application $X \mapsto X(t)$ est bijective de S_H sur \mathbb{C}^n , $(X_1(t), \dots, X_n(t))$ est une base de \mathbb{C}^n , donc la matrice $R(t)$ est inversible. La solution générale de (H) s'écrit $X(t) = R(t)Y$ où $Y \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur colonne (constant).

La méthode des variation des constantes consiste donc à chercher les solutions de (E) sous la forme $X(t) = R(t)Y(t)$. On a alors $X'(t) = R'(t)Y(t) + R(t)Y'(t)$. Remarquons que $R'(t) = A(t)R(t)$ pour tout t , de sorte que (E) devient $R(t)Y'(t) = B(t)$, soit $Y'(t) = R(t)^{-1}B(t)$.

Dans le cas de l'équation différentielle linéaire du second ordre (équation $(E2)$), on suppose donc avoir trouvé deux solutions indépendantes x_1 et x_2 de l'équation $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$. La méthode de la variation des constantes consiste donc à chercher la solution sous la forme $x(t) = u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t)$ où

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) & x_2'(t) \\ x_1(t) & x_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il arrive que l'on ne dispose que d'une solution « évidente » de l'équation $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$. Si cette solution y ne s'annule pas sur I , on va chercher une solution de $(E2)$ sous la forme $x = yz$. L'équation devient $z''(t)y(t) + z'(t)(2y'(t) + a(t)y(t)) + z(t)(y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t)) = c(t)$, soit $z''(t)y(t) + z'(t)(2y'(t) + a(t)y(t)) = c(t)$ qui est une équation du premier ordre en z' .

9.1.3 Systèmes à coefficients constants

On a vu que pour résoudre (E) , « il suffit » de résoudre (H) . Il y a deux cas où l'on peut résoudre (H) :

- lorsque $n = 1$; dans ce cas, on a à résoudre $x' = a(t)x$; sachant qu'une solution non nulle ne s'annule pas sur I , on cherche une solution non nulle en écrivant $\frac{x'}{x} = a(t)$, puis $\ln |x(t)| = f(t) + c$ où f est un primitive de a et enfin, $x(t) = k \exp(f(t))$.
- Lorsque la matrice A est constante. C'est ce cas que nous étudions maintenant.

Lorsque A est diagonale, triangulaire. Lorsque $A = \text{diag}(a_i)$ est diagonale, la résolution du système $X' = AX + B$ s'écrit $x_i' = a_i x_i + b_i(t)$ pour tout i .

Lorsque la matrice A est triangulaire supérieure, on résout les équations en cascade : la dernière équation s'écrit $x_n' = a_{n,n}x_n + b_n(t)$; pour $k < n$, la k -ième équation s'écrit $x_k' = a_{k,k}x_k + z_k(t)$ où $z_k(t) = b_k(t) + \sum_{j=k+1}^n a_{k,j}x_j(t)$ a déjà été décrit.

Changement de base. Soit P une matrice inversible telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale - ou triangulaire. Écrivons $X = PY$. L'équation $X' = AX$ devient $Y' = DY$, que l'on sait résoudre.

Exponentielle de matrices. Soit E un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie ; munissons E d'une norme quelconque (elles sont toutes équivalentes !) et $\mathcal{L}(E)$ de la norme $\| \cdot \|$ associée. Comme $\|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|$ et que l'espace vectoriel normé de dimension finie $\mathcal{L}(E)$ est complet, pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ la série de terme général $\frac{f^n}{n!}$ converge. On note $\exp(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n}{n!}$ sa somme.

Fixons $f \in \mathcal{L}(E)$. En dérivant sous le signe somme, on trouve que l'application $\varphi : t \mapsto \exp(tf)$ est dérivable et que l'on a $\varphi'(t) = f \circ \varphi(t) = \varphi(t) \circ f$.

En termes de matrices, si on pose $R(t) = \exp(tA)$, l'application $t \mapsto R(t)$ est dérivable et l'on a $R'(t) = AR(t)$. En particulier,

- a) pour tout $Y \in \mathbb{C}^n$, l'application $t \mapsto \exp(tA)Y$ est solution de l'équation différentielle $X' = AX$ (sur tout \mathbb{R});
- b) si $B : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ est une application continue, la solution au problème de Cauchy $X' = AX + B(t)$ et $X(t_0) = X_0$ est donnée par $X(t) = \exp((t - t_0)A) \cdot X_0 + \int_{t_0}^t \exp((t - s)A) \cdot B(s) ds$.

9.2 Notions sur les équations différentielles non linéaires

9.2.1 Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue. On considère l'équation différentielle $X' = f(t, X)$. Une solution de cette équation est donc donnée par un intervalle J et une application $X : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que, pour $t \in J$, on ait $(t, X(t)) \in U$ et $X'(t) = f(t, X(t))$.

Remarquons qu'une équation du second ordre $X'' = f(t, X, X')$ (ainsi que les équations différentielles de tout ordre) se ramène à une équation du premier ordre $Z' = g(t, Z)$ en posant $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et en

posant $g\left(t, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} Y \\ f(t, X, Y) \end{pmatrix}$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz local. Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 . Soit $(t_0, X_0) \in U$.

Existence. Il existe un intervalle ouvert $J \subset \mathbb{R}$ contenant t_0 et une solution $X : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ de l'équation différentielle $X' = f(t, X)$ telle que $X(t_0) = X_0$.

Unicité. Soient I et J des intervalles ouverts contenant t_0 et $X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $Y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux solutions de l'équation différentielle $X' = f(t, X)$ et telles que $X(t_0) = Y(t_0)$. Alors X et Y coïncident sur $I \cap J$.

Théorème : Solutions maximales. Sous les hypothèses du théorème ci-dessus, il existe une solution (I, X) qui prolonge toute solution du problème de Cauchy. L'intervalle I est ouvert.

9.2.2 Quelques exemples de résolution « explicite » d'équations différentielles

Équations à variables séparables. Ce sont les équations de la forme $x' = f(t)g(x)$. Une telle équation admet les solutions constantes $x = c$ où c est telle que $g(c) = 0$. Pour trouver les autres solutions, on écrit $\frac{x'}{g(x)} = f(t)$, puis prenant une primitive G de $1/g$ sur un intervalle où g ne s'annule pas et une primitive F de f , on écrit $G(x(t)) = F(t) + c$, puis $x(t) = G^{-1}(F(t) + c)$.

Équations homogènes. Il s'agit d'équations qui se ramènent à $x' = g(x/t)$. Pour résoudre cette équation, on pose $y = x/t$ (*changement de fonction*). On a donc $x = ty$ et $x' = ty' + y$. L'équation devient $ty' = g(y) - y$ qui est une équation différentielle à variables séparables.

Équations de Bernoulli. Ce sont les équations de la forme $y' = a(t)y + b(t)y^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ (définie pour $y > 0$). Pour résoudre cette équation, on effectue le *changement de fonction* $z = y^{1-\alpha}$. Remarquons que $\frac{z'}{z} = (1-\alpha)\frac{y'}{y}$ de sorte que l'équation devient $\frac{z'}{z} = (1-\alpha)a(t) + (1-\alpha)y^{1-\alpha}$, soit $z' = (1-\alpha)a(t)z + (1-\alpha)b(t)$, qui est une équation linéaire.

Équation d'Euler. Il s'agit d'équations différentielles linéaires de la forme $\sum_{k=0}^n a_k t^k x^{(k)} = 0$ ou (avec

second membre) $\sum_{k=0}^n a_k t^k x^{(k)} = b(t)$. A l'aide du *changement de variable* $t = \pm e^u$, en posant donc

$y(u) = x(e^u)$, on se ramène à une équation à coefficients constants que l'on sait résoudre.

On a $y'(u) = e^u x'(e^u)$ et $y''(u) = e^{2u} x''(e^u)$, $y'''(u) = e^{3u} x'''(e^u) + 3e^{2u} x''(e^u) + e^{3u} x'''(e^u)$, etc., de sorte que l'équation $a_3 t^3 x''' + a_2 t^2 x'' + a_1 t x' + a_0 x = 0$ devient l'équation à coefficients constants $a^3 z''' + (a_2 - 3a_3)z'' + (a_1 - a_2 + 2a_3)z' + a_0 z = 0$.

9.2.3 Un exemple « qualitatif » : Lois de Kepler

On étudie le mouvement des planètes. On assimile le soleil à un point fixe que l'on place à l'origine O de notre espace euclidien E . Une planète assimilée à un point de l'espace se trouve en position $M(t) \in E$ au temps t . On note $M'(t), M''(t) \in \vec{E}$ sa vitesse et son accélération au temps t .

Rappelons les lois de Kepler sur le mouvement des planètes :

Lois de Kepler. a) Dans un référentiel immobile par rapport au soleil, la trajectoire d'une planète se trouve dans un plan; elle est elliptique, un foyer étant le soleil.

b) Loi des aires. La surface balayée par le rayon vecteur \vec{r} durant le mouvement est proportionnelle au temps.

c) Le carré de la période T varie comme le cube du demi-grand axe : $\frac{a^3}{T^2} = cte = \frac{k}{4\pi^2}$ (où $k = GM_S$ est produit de la constante G d'attraction universelle par la masse M_S du soleil).

Mouvements à accélération centrale. On suppose que la seule force qui s'exerce sur notre planète est l'attraction solaire. La loi de Newton $\vec{F} = m\vec{M}''$ implique alors que l'accélération est centrale *i.e.* \vec{M}'' est colinéaire à \vec{OM} .

Proposition. On suppose qu'une particule M a une accélération centrale. (On suppose aussi qu'au temps $t = 0$, \vec{OM} et \vec{M}' ne sont pas colinéaires). Alors :

- a) La particule M reste dans un plan P .
- b) Repérons alors M dans des coordonnées polaires ρ, θ de centre O . La fonction $L : t \mapsto \rho(t)^2 \theta'(t)$ ne dépend pas de t .

Démonstration. Fixons une orientation de l'espace et posons $\vec{L}(t) = \vec{OM}(t) \wedge \vec{M}'(t)$. Par la règle de Leibnitz appliquée à l'application bilinéaire \wedge , on trouve $\vec{L}'(t) = \vec{M}'(t) \wedge \vec{M}'(t) + \vec{OM}(t) \wedge \vec{M}''(t) = \vec{0}$ puisque l'accélération est centrale. En particulier la particule reste dans le plan P passant par O et orthogonal à \vec{L} .

Choisissons une orientation de P (et donc de P^\perp).

En prenant des coordonnées polaires, on a $\overrightarrow{OM}(t) = \rho(t)\vec{u}(\theta(t))$, et $M'(t) = \rho'(t)\vec{u}(\theta(t)) + \rho(t)\theta'(t)\vec{v}(\theta(t))$ (où \vec{v} est le vecteur unité de P directement orthogonal à \vec{u}), de sorte que $\overrightarrow{OM}(t) \wedge M'(t) = \rho(t)^2\theta'(t)\vec{w}$ (où $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est le vecteur unité positif orthogonal à P). \square

Loi des aires. Que représente la quantité $\rho^2\theta'$? Elle représente l'aire du parallélogramme dont trois sommets sont $O, M, M + M'$, ou le double de l'aire du triangle $O, M, M + M'$, soit la dérivée de l'aire balayée par le rayon OM .

Dorénavant, on se place dans le plan P qui est un plan euclidien orienté. On fixe l'origine en O et on choisit un repère orthonormé direct, ce qui nous donne des coordonnées polaires associées et identifie P avec \mathbb{C} .

On a donc $z(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$.

On suppose qu'on a une accélération en $1/\rho^2$. On a donc $z''(t) = -k\rho(t)^{-2}e^{i\theta(t)}$ (où $k = Gm$ avec G constante d'attraction universelle et $m =$ masse du soleil).

- Posons $w = ie^{i\theta(t)} - \frac{L}{k}z'(t)$. On trouve $w' = 0$. On pose $e = |w|$. Quitte à changer de repère, on suppose $w = ie$. Il vient $e \cos \theta = \langle w, ie^{i\theta} \rangle = 1 - \frac{L\rho\theta'}{k} = 1 - \frac{L^2}{k\rho}$, donc $\rho = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$ avec $p = \frac{L^2}{k}$.
- Enfin, en supposant $e < 1$, on a une ellipse de grand axe $2a = \frac{p}{1 - e} + \frac{p}{1 + e} = \frac{2p}{1 - e^2}$ et de demi petit axe $b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}$. Aire : $A = \pi ab = \frac{\pi p^2}{(1 - e^2)^{3/2}}$. Il vient

$$T = \frac{2A}{L} = \frac{2\pi L^3}{k^2(1 - e^2)^{3/2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}a^{3/2}.$$

On suppose inversement que la trajectoire est une conique. On observe que les planètes parcourent des ellipses de foyer O . On a donc $\rho(t) = \frac{p}{1 - e \cos \theta(t)}$.

On trouve $\rho'(t) = \theta'(t) \frac{-pe \sin(\theta(t))}{(1 - e \cos \theta(t))^2} = -\frac{Le}{p} \sin \theta(t)$, donc

$$M'(t) = \frac{L}{p}(ie - \vec{v}(\theta)), \text{ donc } z''(t) = -\frac{L}{p}\theta'(t)e^{i\theta} = -\frac{k}{\rho(t)^2}e^{i\theta} \text{ avec } k = \frac{L^2}{p}.$$

9.3 Exercices

9.1 Exercice. Résoudre l'équation différentielle $y'' - xy = 0$. On exprimera les solutions à l'aide de séries entières.

9.2 Exercice. Tirés de [Monier Analyse]

1. (10.3, page 220) Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $y'' + y = e^{-|t|}$.
2. (10.1.b, page 215) Résoudre l'équation dégénérée $(t + 1)y' = ty$.
3. (10.2, page 219) Trouver y dérivable sur \mathbb{R} telle qu'en tout point $y' - y = \int_0^1 y(t)dt$.

9.3 Exercice. Tirés de [Demailly]

1. P. 146-148, équation à variables séparées, par exemple : $y' = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-t^2}}$.
2. P. 153, équations de Riccati, exemple : $(1-t^3)y' + t^2y + y^2 = 2t$.
3. P. 162-164, équations de Lagrange et de Clairaut : $y = a(y')t + b(y')$.
4. P. 187. Déterminer la trajectoire d'une particule de masse m et de charge électrique q se déplaçant sous l'action d'un champ magnétique \vec{B} et d'un champ électrique \vec{E} uniformes et indépendants du temps. En d'autres termes résoudre l'équation différentielle suivante sur la vitesse : $m\vec{V}' = q(\vec{V} \wedge \vec{B} + \vec{E})$.

9.4 Exercice. Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $q_1, q_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ des applications continues. On suppose que pour tout $t \in I$ on a $q_2(t) \geq q_1(t)$. Soient $u_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) des applications de classe C^2 telles que $u_i'' + q_i u_i = 0$. Soient $a < b \in I$. On suppose que $u_1(a) = u_1(b) = 0$ et que u_1 et u_2 ne s'annulent pas sur $]a, b[$. Quitte à remplacer u_i par $-u_i$ on peut supposer que u_1 et u_2 sont positives sur $]a, b[$. On pose $w(t) = u_1'(t)u_2(t) - u_2'(t)u_1(t)$.

1. Démontrer que w est croissante sur $[a, b]$, que $w(a) \geq 0$ et $w(b) \leq 0$.
2. En déduire que u_1 et u_2 sont proportionnelles sur $[a, b]$.

9.5 Exercice.

1. Soit κ une fonction continue sur un intervalle de \mathbb{R} , déterminer une courbe plane de classe C^2 dont la courbure au point d'abscisse curviligne s soit égale à $\kappa(s)$. (Indication : résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z' = i\kappa z$.) Comment sont faites toutes les courbes de courbure κ ?
2. Soit A une application continue d'un intervalle I de \mathbb{R} dans l'espace vectoriel des matrices 3×3 antisymétriques, démontrer pour tout $t_0 \in I$ l'existence et l'unicité d'une application Y de classe C^1 de I dans l'ensemble des matrices 3×3 , telle que 1) $Y(t_0) = Id$, et 2) $Y' = AY$. Démontrer que pour tout t dans I , la matrice $Y(t)$ est orthogonale.
3. Soient κ, τ deux fonctions continues sur un intervalle de \mathbb{R} ; appliquer l'exercice précédent pour établir l'existence d'une courbe gauche de classe C^3 de courbure κ et de torsion τ .
4. Déterminer les courbes gauches de courbure et torsion constantes.

9.6 Exercice. *Fonctions de Bessel.* Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$J(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin t) dt.$$

1. Démontrer que J est analytique sur \mathbb{R} et donner son développement en série entière au voisinage de 0.
2. Démontrer que J est une fonction de classe C^2 sur \mathbb{R} , qui est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle

$$xy'' + y' + xy = 0.$$

3. Démontrer que J est l'unique (à multiple scalaire près) solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $xy'' + y' + xy = 0$.
4. Démontrer qu'il existe des fonctions r et θ de classe C^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que $J(x) = r(x) \cos \theta(x)$ et $J'(x) = -r(x) \sin \theta(x)$.
5. Démontrer que la fonction $x \mapsto r(x)^2$ est décroissante sur \mathbb{R}_+ et que $x \mapsto x r(x)$ est croissante sur \mathbb{R}_+ .
6. Démontrer que l'on a $\theta'(x) = 1 + \frac{\cos \theta(x) \sin \theta(x)}{x}$. En déduire que J s'annule une infinité de fois.
7. Démontrer que J' est solution de l'équation différentielle $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$.

8. On définit par récurrence la suite J_n de fonctions de Bessel en posant

$$J_0 = J \text{ et } J_{n+1}(x) = \frac{nJ_n(x)}{x} - J'_n(x).$$

Démontrer que J_n est analytique et satisfait l'équation différentielle $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$.

Les fonctions de Bessel interviennent dans les ondes électromagnétiques dans un guide cylindrique (antenne), les modes de vibration d'une fine membrane circulaire ou annulaire, l'étude d'instruments optiques, le pendule de Bessel...

9.4 Solutions

Exercice 9.1. On cherche des solutions sous la forme $y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$. L'équation devient $\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)(k+2)a_{k+2}x^k - \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k-1}x^k = 0$. Cela implique $a_2 = 0$ et pour $k \geq 1$, $(k+1)(k+2)a_{k+2} = a_{k-1}$.

On en déduit que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, on a

- $a_{3\ell+2} = 0$;
- $a_{3\ell} = \frac{a_0}{\prod_{i=1}^{\ell} 3i(3i-1)}$
- $a_{3\ell+1} = \frac{a_1}{\prod_{i=1}^{\ell} 3i(3i+1)}$.

On obtient donc une base de l'espace des solutions :

$$y_1(x) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{x^{3\ell}}{\prod_{i=1}^{\ell} 3i(3i-1)} \quad y_2(x) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{x^{3\ell+1}}{\prod_{i=1}^{\ell} 3i(3i+1)}.$$

Ce sont deux séries entières de rayon de convergence infini.

Exercice 9.2.

1. Les solutions de l'équation homogène associée sont $y(t) = a \cos t + b \sin t$. Sur \mathbb{R}_+ et sur \mathbb{R}_- , la fonction $t \mapsto \frac{e^{-|t|}}{2}$ est solution particulière. Par contre, cette fonction n'est pas dérivable en 0. Pour raccorder, on va chercher la solution f qui vérifie $f'(0) = 0$ (et $f(0) = 1/2$) : il suffit de prendre $f(t) = \frac{e^{-t} + \sin t}{2}$ pour $t \geq 0$ et $f(t) = \frac{e^t - \sin t}{2}$ pour $t \leq 0$. Enfin, la solution générale est donc $t \mapsto \frac{e^{-|t|} + \sin |t|}{2} + a \cos t + b \sin t$.
2. Sur les intervalles $] -\infty, -1[$ et $] -1, +\infty[$, cette équation est $y' = \frac{t}{t+1}y$, dont une solution est $y = \exp\left(\int \frac{t}{t+1} dt\right)$; on trouve $y(t) = c \frac{e^t}{t+1}$ sur chacun de ces intervalles. La seule solution qui se raccorde est la solution nulle.
3. Une telle fonction vérifie $y' - y = c$ où c est indépendant de t : elle est de la forme $y(t) = ae^t - c$ où a et c sont des constantes. Enfin, on doit avoir $a(e-1) - c = \int_0^1 y(t) dt = c$. Les solutions sont donc de la forme $a\left(e^t - \frac{e-1}{2}\right)$.

Exercice 9.3. Voir [Demailly]... Sommairement :

1. On écrit $\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, puis $\arcsin y = \arcsin t + c$, puis $y = \sin(\arcsin t + c)$ et enfin $y(t) = t \cos c + \sqrt{1-t^2} \sin c$.
2. Il y a ici une solution particulière « évidente » $y = \frac{1}{t}$. On cherche alors la solution sous la forme $y = z + \frac{1}{t}$. On trouve une équation de Bernoulli $z'(1-t^3) + (t^2 + \frac{2}{t})z + z^2 = 0$; posant donc $z = \frac{1}{u}$ on trouve une équation linéaire $(t^3 - 1)u + (t^2 + \frac{2}{t})u + 1 = 0$ que l'on peut résoudre...
3. Par dérivation de l'équation nous obtenons : $y' = a(y') + ta'(y')y'' + b'(y')y''$ qui est l'équation : $a(x) - x + x'(ta'(x) + b'(x)) = 0$ (avec $x = y'$). Notons alors z la fonction réciproque de x (supposée bijective...), et sachant que $z'(x) = 1/x'$, on obtient l'équation $(a(x) - x)z' + a'(x)z + b'(x) = 0$ qui est une équation différentielle linéaire.
4. L'application $f : X \mapsto q(\vec{V} \wedge \vec{B})$ est linéaire; on a donc à faire à l'équation $\vec{V}' = f(\vec{V}) + q\vec{E}$; dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans laquelle $q\vec{B} = c\vec{k}$ la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & -c & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. L'équation homogène associée $\vec{V}' = f(\vec{V})$ admet les solutions

$$\vec{V}(t) = e^{tf}(\vec{V}(0)) = a(\cos(tc + \alpha)\vec{i} + \sin(tc + \alpha)\vec{j}) + b\vec{k}$$

(où a, b, α sont des constantes). Pour trouver une solution particulière pour l'équation $\vec{V}' = f(\vec{V}) + q\vec{E}$, on écrit $\vec{E} = \vec{E}_0 + d\vec{k}$ avec \vec{E}_0 orthogonal à \vec{B} et $d \in \mathbb{R}$; une solution particulière est $\vec{E}_1 + tdk$, où \vec{E}_1 est tel que $\vec{E}_1 \wedge \vec{B} = \vec{E}_0$. La solution générale de l'équation homogène est donc

$$\vec{V}(t) = e^{tf}(\vec{V}(0)) = a(\cos(tc + \alpha)\vec{i} + \sin(tc + \alpha)\vec{j}) + \vec{E}_1 + (b + dt)\vec{k}.$$

Exercice 9.4.

1. On a $w'(t) = u_1''(t)u_2(t) - u_2''(t)u_1(t) = (q_2(t) - q_1(t))u_1(t)u_2(t) \geq 0$. Comme $u_1(t) > 0$ pour $t > a$ proche de a , il vient $u_1'(a) \geq 0$ (et comme u_1 n'est pas nulle et est solution de l'équation différentielle $u'' + q_1(t)u = 0$, u_1 et u_1' ne peuvent pas s'annuler simultanément); donc $w(a) \geq 0$. De même $u_2'(b) \leq 0$, donc $w(b) \leq 0$.
2. On en déduit que $w(t) = 0$ pour $t \in [a, b]$. Il vient $\left(\frac{u_1}{u_2}\right)' = 0$ sur $]a, b[$.

Exercice 9.5.

1. Notons $s \mapsto u(s)$ une courbe tracée dans \mathbb{C} identifiée avec \mathbb{R}^2 . On suppose que s est une abscisse curviligne de sorte que $|u'(s)| = 1$. Posons $z(s) = u'(s)$. La courbure $\kappa(s)$ est alors $\frac{z'(s)}{iz(s)}$. On note donc θ une primitive de κ ; on pose $z(s) = e^{i\theta(s)}$, puis u une primitive de z . Notons que θ et u sont uniques à une constante près; on passe donc d'une telle courbe à une autre par une isométrie directe.
2. La première question résulte du théorème de Cauchy-Lipschitz. On a ${}^tY' = {}^tY^tA = -{}^tYA$, donc $({}^tYY)' = {}^tY'Y + {}^tYY' = 0$. Cela prouve que tYY est constante égale à l'identité, donc Y est orthogonale.
3. (On suppose que κ ne s'annule pas). On cherche donc un chemin $s \mapsto X(s)$ dans \mathbb{R}^3 de classe C^3 tel que $\|X'(s)\| = 1$; (s est une abscisse curviligne); on pose $X'(s) = u(s)$; notons que $0 = \langle u(s)|u(s) \rangle' = 2\langle u'(s)|u(s) \rangle$; $u'(s) = \kappa(s)v(s)$ où $v(s)$ est de norme 1 (et orthogonal à $u(s)$); enfin $\langle v'(s)|v(s) \rangle = 0$ (puisque $\|v(s)\| = 1$) et $0 = \langle v(s)|u(s) \rangle' = \langle v(s)|u'(s) \rangle + \langle v'(s)|u(s) \rangle$, donc $v'(s) = -\kappa(s)u(s) + \tau(s)w(s)$, où $w(s) = u(s) \wedge v(s)$. Enfin, dérivant les produits scalaires $\langle w|u \rangle$, $\langle w|v \rangle$ et $\langle w|w \rangle$, on trouve $w'(s) = -\tau(s)v(s)$. Notant $Y(s)$ la matrice dont les vecteurs ligne

sont u, v, w , l'équation s'écrit donc : $Y'(s) = A(s)Y(s)$, où $A(s) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix}$. La question précédente nous donne l'existence d'un tel Y , puis, en intégrant u , on trouve X .

4. Ici $Y(s) = e^{sA}Y_0$. Cela dit, posons $\rho = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$, $U(s) = \frac{1}{\rho}(\kappa u(s) - \tau w(s))$, $V(s) = v(s)$ et $W(s) = U(s) \wedge V(s) = \frac{1}{\rho}(\tau u(s) + \kappa w(s))$; on a $V'(s) = \rho U(s)$, $U'(s) = V(s)$ et $W'(s) = 0$, de sorte que $U(s) = \cos(\rho s)U + \sin(\rho s)V$, (où $U = U(0), V = V(0), W$ est une base orthonormée directe) et enfin,

$$u(s) = \frac{1}{\rho}(\kappa U(s) + \tau W(s)) = \frac{1}{\rho}(\kappa(\cos(\rho s)U + \sin(\rho s)V) + \tau W).$$

Finalement

$$X(s) = \frac{\kappa}{\rho^2}(\sin(\rho s)U - \cos(\rho s)V) + s\frac{\tau}{\rho}W + X_0$$

où (X_0, U, V, W) est un repère orthonomé direct. La trajectoire décrite est une *hélice circulaire*.

Exercice 9.6.

1. On a

$$J(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2 \sin^2 t)^n}{(2n)!} dt.$$

Il s'agit, pour x fixé, d'intervertir \int et \sum . On peut pour cela, invoquer la convergence normale de la série de fonctions $t \mapsto \frac{(-x^2 \sin^2 t)^n}{(2n)!}$, la convergence dominée... Tout marche. On a donc

$$J(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}, \text{ où } a_n = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t dt. \text{ Si on veut pousser plus loin ce calcul, on peut}$$

remarquer que l'on a : $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t dt = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ (intégrale de Wallis).

2. On peut dériver sous le signe \int : pour cela, il suffit de dire que $f : (x, t) \mapsto \cos(x \sin t)$ et de majorer la valeur absolue de $\partial f / \partial x(x, t) = -(\sin t) \sin(x \sin t)$ puis celle de $\partial^2 f / (\partial x)^2(x, t) = -(\sin^2 t) \cos(x \sin t)$ par 1 !

On a donc $J'(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} -(\sin t) \sin(x \sin t) dt$ et $J''(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} -(\sin^2 t) \cos(x \sin t) dt$. Il vient

$$\begin{aligned} x(J''(x) + J(x)) + J'(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[x(\cos^2 t) \cos(x \sin t) - (\sin t) \sin(x \sin t) \right] dt \\ &= \frac{2}{\pi} \varphi'(t) dt = 0 \end{aligned}$$

où $\varphi(t) = (\cos t) \sin(x \sin t)$ qui vérifie $\varphi(0) = \varphi(\pi/2) = 0$.

3. On sait que cette équation admet sur \mathbb{R}_+^* une base de solutions J, y . Il s'agit de démontrer que y ne se prolonge pas en 0. Cherchons y , au voisinage de 0, sous la forme zJ . On a $y' = zJ' + z'J$ et $y'' = zJ'' + 2z'J' + z''J$ de sorte que $xJz'' + 2xJ'z' + z'J = 0$ soit $(xJ^2z')' = 0$. Enfin $z' = \frac{c}{xJ^2}$, où c est une constante. Si $c \neq 0$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} |z'(x)| = +\infty$.

4. Remarquons que J et J' ne s'annulent pas simultanément : $J(0) = 1 \neq 0$ et, dans chacun des intervalles \mathbb{R}_-^* et \mathbb{R}_+^* la fonction J est solution d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre : la seule solution de cette équation qui vérifie $y(t_0) = y'(t_0) = 0$ est la solution nulle. On applique alors le lemme du relèvement.

5. On a $r^2 = J^2 + J'^2$; sa dérivée en $x > 0$ est $2J'(x)(J(x) + J''(x)) = -2\frac{J'(x)^2}{x} \leq 0$; la dérivée en x de $x \mapsto x^2 r(x)^2$ est $2x(J(x)^2 + J'(x)^2) - 2xJ'(x)^2 = 2xJ(x)^2 \geq 0$.

6. Dérivant $J(x) = \cos \theta(x)$ et $J'(x) = -r(x) \sin \theta(x)$, il vient $J'(x) = r'(x) \cos \theta(x) - r(x) \theta'(x) \sin \theta(x)$ et $J''(x) = -r'(x) \sin \theta(x) - r(x) \theta'(x) \cos \theta(x)$. Multipliant ces expressions par $J' = -r \sin \theta$ et $J = r \cos \theta$, on trouve $J'(x)^2 - J(x)J''(x) = \theta'(x)r(x)^2$. Enfin, comme $-J''(x) = J(x) + \frac{J'(x)}{x}$, on a

$$\theta'(x)r(x)^2 = J'(x)^2 - J(x)J''(x) = J'(x)^2 + J(x)^2 - \frac{J(x)J'(x)}{x} = r(x)^2 \left(1 + \frac{\cos \theta(x) \sin \theta(x)}{x} \right).$$

On en déduit que $\theta'(x) \geq 1/2$ pour $x \geq 1$, donc $\lim_{x \rightarrow \infty} \theta(x) = +\infty$. Donc $\theta([1, +\infty[)$ est un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ et contient donc une infinité de valeurs $k\pi + \pi/2$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

7. Dérivant l'expression $J''(x) + \frac{J'(x)}{x} + J(x) = 0$, on trouve $J'''(x) + \frac{J''(x)}{x} - \frac{J'(x)}{x^2} + J'(x) = 0$; multipliant par x^2 , on trouve l'expression voulue.

8. On utilise une récurrence ; le résultat est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$. Pour passer de n à $n + 1$, il faut prendre le calcul par le bon bout, mais on y arrive... Par exemple :

a) On a $J'_{n+1}(x) = -J''_n(x) + n\frac{J'_n(x)}{x} - n\frac{J_n(x)}{x^2}$. Écrivant $-J''_n(x) = \frac{J'_n(x)}{x} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)J_n(x)$ (hypothèse de récurrence), il vient

$$J'_{n+1}(x) = (n+1)J'_n(x) + \left(1 - \frac{n(n+1)}{x^2}\right)J_n(x) = J_n(x) - (n+1)\frac{J_{n+1}(x)}{x}.$$

On a donc $J_n(x) = J'_{n+1}(x) + (n+1)\frac{J_{n+1}(x)}{x}$.

b) Dérivant l'expression obtenue en (a), on trouve :

$$J'_n(x) = J''_{n+1}(x) + (n+1)\frac{J'_{n+1}(x)}{x} - (n+1)\frac{J_{n+1}(x)}{x^2}. \quad (1)$$

Or, par définition de J_{n+1} , on a

$$J'_n(x) = -J_{n+1}(x) + n\frac{J_n(x)}{x} \quad (2)$$

$$= -J_{n+1}(x) + \frac{n}{x} \left(J'_{n+1}(x) + (n+1)\frac{J_{n+1}(x)}{x} \right). \quad (3)$$

En écrivant l'égalité des membres de droite des équations (1) et (3), on trouve

$$J''_{n+1}(x) + \frac{J'_{n+1}(x)}{x} + \left(1 - \frac{(n+1)^2}{x^2}\right)J_{n+1}(x) = 0.$$