Explications

Pour deux clous, les parcours qui conviennent sont ceux pour lesquels le nombre total de tours de ficelle autour de chaque clou est nul ; autrement dit, la ficelle tourne autour de chaque clou autant de fois dans le sens des aiguille d'une montre que dans le sens inverse. Le codage rend la situation limpide : le mot convient si et seulement si il y a autant de a que de A et autant de b que de B.

Ceci se généralise à un plus grand nombre de lettres : on considère un parcours de la ficelle autour de (par exemple) 26 clous, codé par un mot sur l'alphabet a,A,b,B,...,z,Z. Retirer un clou revient à supprimer dans notre mot toutes les lettres correspondant à ce clou. Le tableau tombe si et seulement si le mot devient "trivial", au sens où en utilisant les règles $aA = Aa = bB = Bb = \cdots = 1$ on arrive à supprimer successivement toutes les lettres du mot. Cette description ne nous dit pas comment trouver un mot qui convienne ; ici les commutateurs peuvent aider. Pour un mot m, on note M le mot inverse, celui qu'entre matheux on noterait m^{-1}, et on note $[m, n]$ le commutateur $mnMN$. Pour deux clous, le mot le plus simple qui convienne est $[a, b] = abAB$. Pour trois clous, une solution est donnée par le commutateur

$$[[a, b], c].$$

De façon générale, si m est un mot sur les 25 premières lettres (et leurs majuscules) qui convient pour 25 clous, alors le mot $[m, z]$ convient pour 26 clous. (Je ne sais pas décrire explicitement tous les mots qui conviennent pour plus de deux lettres, en particulier je ne sais pas si le lien avec les commutateurs est fondamental ; en particulier, je ne sais pas trouver les plus courts).

Ceux qui connaissent auront reconnu le groupe libre ; pour ceux qui ne connaissent pas : on travaille avec les mots en a, A, b, B, et les règles $aA = Aa = bB = Bb = 1$. L'ensemble de tous les mots, quotienté par la relation d'équivalence engendrée par les règles, définit un ensemble G ; la loi de concaténation des mots le muni d'une loi de groupe. Ce groupe est le groupe libre à deux générateurs ; la construction se généralise à un nombre quelconque de lettres. Dans ce groupe, chaque élément a un unique représentant qui est un "mot réduit", c'est-à-dire dans lequel aucune lettre n'est suivie de son inverse. Supprimer toutes les occurrences d'une lettre et de son inverse définit un morphisme de groupe dans le groupe libre avec un générateur de moins ; les mots qui conviennent à notre problème sont ceux qui sont dans l'intersection des noyaux de tous ces morphismes.

Aides

La première question est sans doute la plus difficile, mais les ficelles permettent de faire des essais. Pour aider ceux qui bloquent vraiment, sans comprendre quelle liberté on a, on peut commencer par leur montrer une configuration non standard, par exemple celle où les deux brins issus du tableau passent par dessus le premier clou et se rejoignent en entourant le deuxième. On fait remarquer que ça marche lorsqu'on retire le deuxième, mais pas le premier. Quel est le problème ? (La corde fait un tour autour du second clou, comment faire pour "défaire" ce tour ?)

Pour la question à trois clous, on peut introduire les commutateurs, y compris la notation $[a, b]$.

Stand dominos, triominos

Dominos

	dominos "doubles" ex : [•|•]	dominos "simples" ex : [•|•]	total
numérotés de 0 à 6 :	7	$+ \ldots \dfrac{7 \times 6}{2}$	$= 28$
numérotés de 0 à n :	$(n+1)$	$+ \dfrac{(n+1) \times n}{2}$	$= \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

choix d'un 1er chiffre

choix d'un 2e chiffre différent du 1er

chaque domino est compté 2 fois ([•\|•] = [•\|•])

Triominos

	"triples" (ex △)	"doubles" (ex △)	"simples" (ex △)	total
numérotés de 0 à 2	3	$+ (3 \times 2)$	$+ 2$	$= 11$
numérotés de 0 à n	$(n+1)$	$+ (n+1) \times n$	$+ 2 \times \dfrac{(n+1) \times n \times (n-1)}{6}$	$= (n+1)^2 + \dfrac{(n+1)n(n-1)}{3}$

choix du chiffre qui apparaît 2 fois

choix du chiffre qui apparaît 1 fois

0, 1 et 2 sont placés dans le sens des aiguilles d'une montre (△) ou dans le sens contraire (△)

sens dans lequel les nombres sont écrits

nombre de façons de choisir un ensemble de 3 nombres différents parmi $\{0, \ldots, n\}$:

$(n+1)$ choix pour le 1er

n ——— 2e

$(n-1)$ ——— 3e

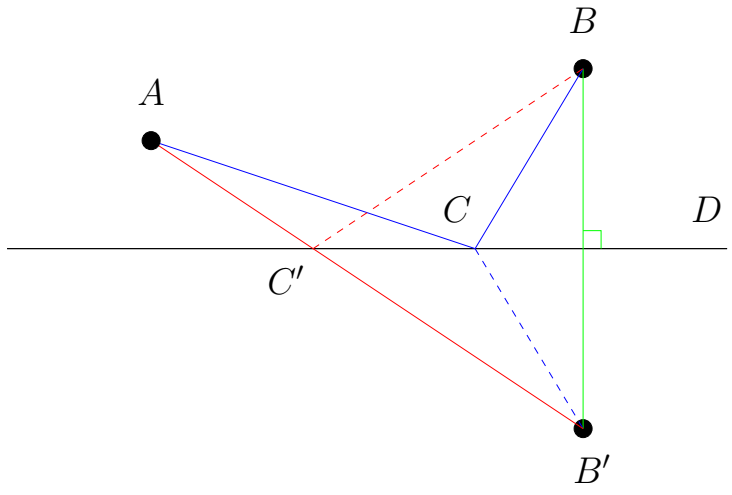
et ainsi on a obtenu exactement 6 fois les mêmes trois nombres (ex : (1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)).

Grand froid sur la banquise

Nous abordons ici les théorèmes isopérimétriques. La question est la suivante : quelle est la forme géométrique, dans le plan euclidien, qui maximise son aire à périmètre fixé ? Certains auront peut être l'intuition de la réponse : il s'agit du disque. Mais la démonstration de ce résultat est étonnamment complexe. Nous allons donc essayer de montrer un résultat plus simple, le théorème isopérimétrique pour les polygones, qui affirme que le polygone à n côtés de plus grande aire à périmètre fixé est le polygone régulier, c'est-à-dire le polygone dont tous les côtés sont de même longueur et tous les angles sont égaux.

1 Chemin le plus court

Cette partie introduit un raisonnement qui nous sera utile par la suite. Le plus court chemin entre deux points A et B est le segment $[AB]$. Si ce segment coupe la droite D, il est donc également le plus court chemin entre A et B passant par D. Dans le cas contraire, considérons un chemin ACB de A à B coupant la droite D en un point C. Notons B' le symétrique de B par rapport à la droite D. Au chemin ACB on peut faire correspondre un chemin de A à B' : le chemin ACB'. Les chemins ACB et ACB' ont même longueur. Or le plus court chemin de A à B' est le segment $[AB']$, qui coupe la droite D en un point C'. Le plus court chemin de A à B qui coupe D est donc le chemin $AC'B$.

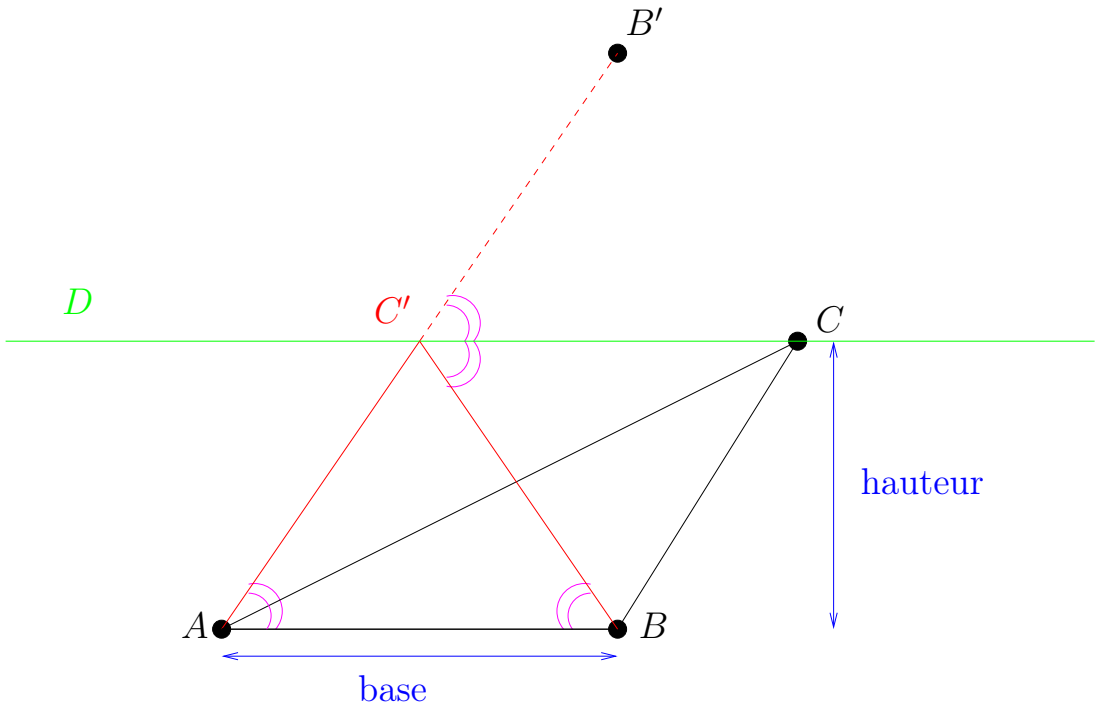


Remarque : pour aider des participants en manque d'inspiration, on pourra introduire le point B'.

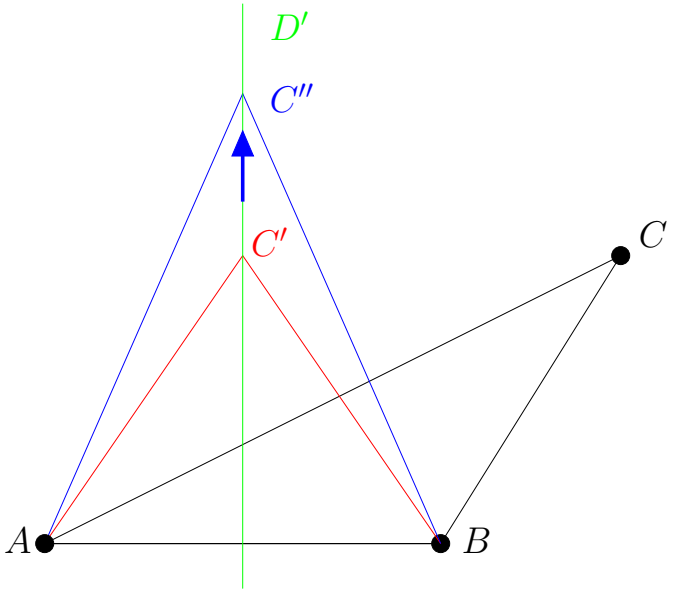
2 Triangle

L'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit de la longueur de sa base par sa hauteur. Ce résultat peut être retrouvé en voyant le triangle ABC comme la moitié d'un parallélogramme. Ainsi, pour que le triangle conserve la même aire, il faut déplace C de façon à ce que la triangle conserve la même hauteur, c'est-à-dire le long de la droite D qui est la parallèle à (AB) passant par C. Déplacer C le long de la droite D de façon à ce que le périmètre du triangle soit minimal revient exactement à trouver le point C' de D

tel que le chemin $AC'B$ soit le plus court chemin de A à B passant par D : nous avons déjà vu comment faire dans la partie précédente ! Si B' est le symétrique de B par rapport à D, on trace le segment $[AB']$, il coupe D en un point C', et le triangle $AC'B$ est le triangle de même aire que le triangle ABC et qui a le plus petit périmètre possible. Or l'angle $\widehat{BAC'}$ est égal à l'angle $\widehat{CC'B'}$, qui est égal à l'angle $\widehat{BC'C}$, lui-même égal à l'angle $\widehat{ABC'}$. Le triangle ABC' que nous avons obtenu est donc isocèle en C'. Le triangle de base fixée $[AB]$ et d'aire fixée (celle du triangle ABC) qui a le plus petit périmètre est donc le triangle ABC' qui est isocèle en C'.



Si on "tire vers le haut" le point C', c'est-à-dire si on le déplace le long de la médiatrice D' du segment $[AB]$, le périmètre et l'aire du triangle obtenu augmentent au fur et à mesure. Arrêtons-nous au point C'' quand le périmètre du triangle ABC'' obtenu est exactement celui de ABC. Le triangle ABC'' obtenu a même périmètre que ABC, mais une aire strictement plus grande que celle de ABC' (qu'il contient strictement) donc que celle de ABC. Remarquons qu'il est isocèle en C'' puisque C'' appartient à D'.



Soit ABE le triangle de base $[AB]$ et de même périmètre que ABC qui a la plus grande aire possible. Si ABE n'est pas isocèle en E, on peut comme précédemment déplacer E pour obtenir un triangle ABE'

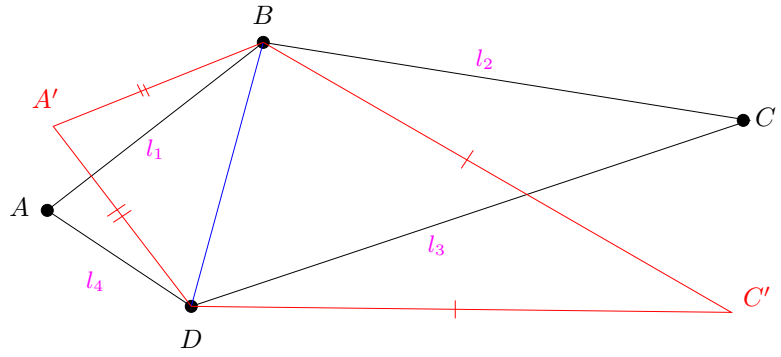
isocèle en E' de même aire que ABE mais de périmètre strictement plus petit, puis à nouveau déplacer E' pour obtenir un triangle ABE'' de même périmètre que ABE, donc que ABC, et d'aire strictement plus grande que ABE, qui était pourtant supposée maximale : c'est absurde. ABE est donc nécessairement isocèle en E, et donc il s'agit du triangle ABC'' (ou de son symétrique par rapport à la droite (AB)).

Autorisons-nous maintenant à déplacer également la base du triangle : on cherche le triangle EFG de même périmètre que ABC et de plus grande aire possible. Si EFG n'est pas équilatéral, deux de ses côtés sont de longueur distinctes, par exemple $[EG]$ et $[FG]$. Alors en fixant E et F, on peut comme précédemment déplacer G pour obtenir un triangle de même périmètre que EFG (donc que ABC) mais d'aire strictement plus grande que celle de EFG, qui est pourtant supposée maximale : c'est absurde à nouveau. Le triangle solution du problème isopérimétrique est donc le triangle équilatéral. Nous avons démontré le théorème isopérimétrique pour les triangles.

Remarque : dans la version la plus simple de ce stand, il n'y a pas à se rappeler la formule de l'aire d'un triangle, ne pas hésiter à la rappeler dans les autres versions ; on peut également suggérer aux participants de se re-servir de la 1*ère partie s'ils n'y pensent pas.*

3 Quadrilatère

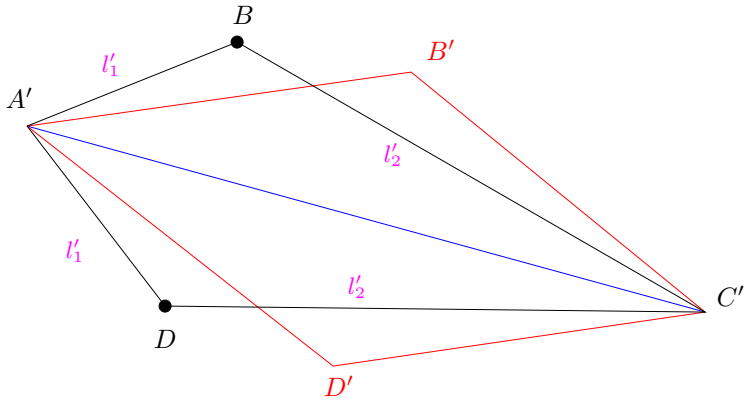
On commence par découper le quadrilatère $ABCD$ en 2 triangles ABD et BCD. Par la méthode que nous avons vue sur les triangles, si les segments $[AB]$ et $[AD]$ ne sont pas de même longueur, on peut déplacer le point A en A' de telle sorte que le triangle $A'BD$ soit isocèle en A', de même périmètre que ABD et d'aire strictement plus grande (maximale en fait à base et périmètre fixés). Si on note $l_i, i = 1...4$ les longueurs des côtés du quadrilatère $ABCD$ comme sur la figure, on obtient donc que les segments $[A'D]$ et $[A'B]$ ont pour longueur $l'_1 = \frac{l_1+l_4}{2}$. Si $[BC]$ et $[CD]$ ne sont pas de même longueur, déplaçons de même le point C en C' et notons $l'_2 = \frac{l_2+l_3}{2}$.

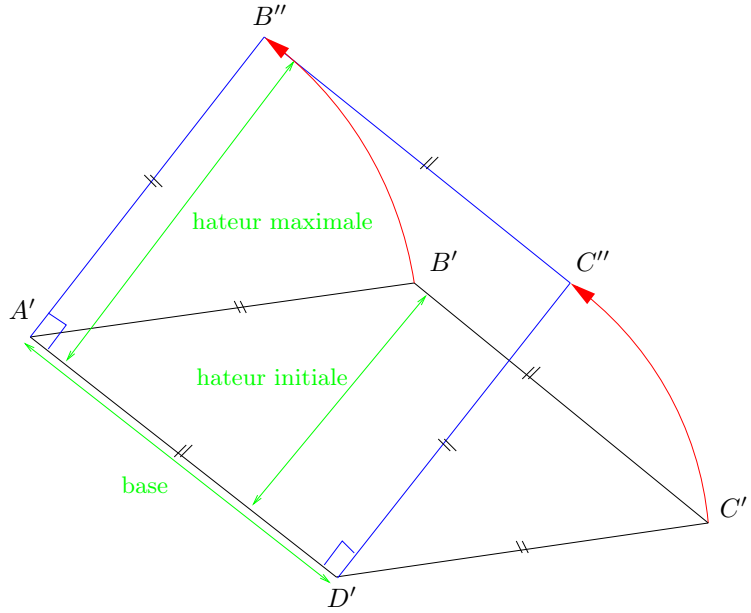


Ensuite, on découpe à nouveau le quadrilatère $A'BC'D$ en deux triangles $A'BC'$ et $A'DC'$, et en itérant la construction précédente on déplace de même B en B' et D en D'. Pourvu qu'au moins deux des côtés du quadrilatère initial $ABCD$ ne soient pas de même longueur, on obtient un nouveau quadrilatère $A'B'C'D'$ de même périmètre que $ABCD$ et d'aire strictement plus grande. De plus, chacun des côtés de $A'B'C'D'$ a pour longueur $\frac{l'_1+l'_2}{2} = \frac{l_1+l_2+l_3+l_4}{4}$ donc il s'agit d'un losange.

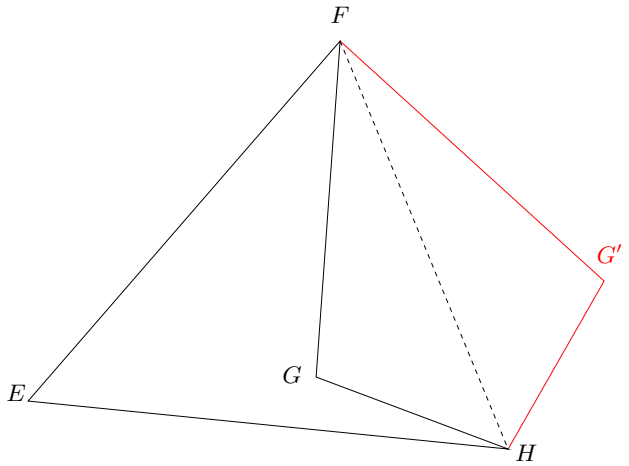
L'aire de ce losange est égale au produit de sa base par sa hauteur. Quand on "déforme" le losange, c'est-à-dire quand on garde les longueurs de ses côtés fixées et qu'on modifie ses angles, on garde sa base constante et on modifie sa hauteur. Pour maximiser son aire, il faut donc maximiser sa hauteur. Le quadrilatère $A'B''C''D'$ dont les côtés ont même longueur que ceux de $A'B'C'D'$ et dont la hauteur, et donc l'aire, sont maximales est donc le carré.

Soit $EFGH$ un quadrilatère de même périmètre que $ABCD$ et d'aire maximale. Si $EFGH$ n'était pas convexe, son aire ne pourrait pas être maximale : si par exemple c'est le point G qui était inclus à l'intérieur de l'enveloppe convexe de $EFGH$, en notant G' son symétrique par rapport à (FH), alors $EFG'H$ aurait alors même périmètre que $EFGH$ et une aire strictement plus grande, ce qui est absurde, donc $EFGH$ est convexe. Si $EFGH$ n'était pas un losange, on pourrait lui associer comme précédemment





un losange de même périmètre et d'aire strictement plus grande, alors qu'on a supposé que l'aire de $EFGH$ est maximale, donc $EFGH$ est nécessairement un losange. Si $EFGH$ n'était pas un carré, on pourrait le "déformer" comme précédemment pour obtenir un carré de même périmètre et d'aire strictement plus grande, donc $EFGH$ est nécessairement un carré.

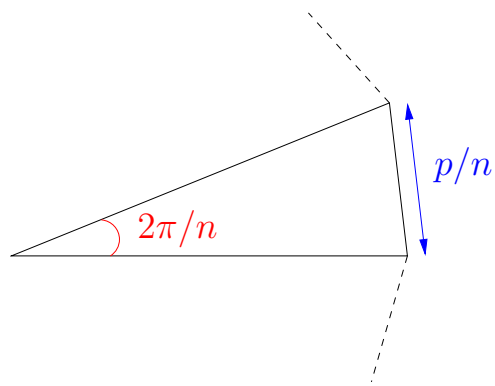


Remarque : on peut suggérer au participants de ré-utiliser la 2ème partie du stand en faisant apparaître des triangles dans leur construction.

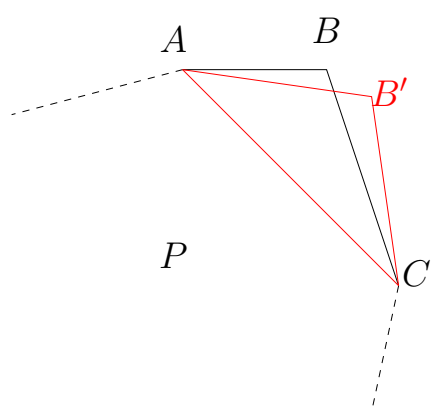
4 Pour aller plus loin

Le théorème isopérimétrique pour les polygones affirme que le polygone à n côtés de périmètre fixé et d'aire maximale est le polygone régulier, c'est-à-dire le polygone dont tous les côtés sont de même longueur et tous les angles sont égaux. Nous venons de montrer les cas particuliers $n = 3$ et $n = 4$.

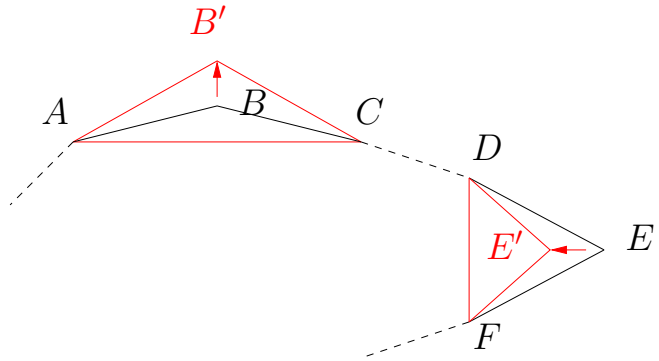
Le polygone régulier à n côtés peut être découpé en n triangles de même aire (comme suggéré sur la figure de l'énoncé). Si on note p le périmètre de ce polygone, on trouve par un calcul élémentaire que l'aire de chacun des petits triangles est $\frac{p^2}{4n^2\tan(\pi/n)}$. L'aire du polygone régulier à n côtés (de périmètre p) est donc $a_n = \frac{p^2}{4n\tan(\pi/n)}$. Le disque de périmètre p a pour rayon $\frac{p}{2\pi}$ et donc pour aire $a = \frac{p^2}{4\pi}$. Puisque $\tan\theta > \theta$ pour tout $\theta \in]0, \pi/2[$, on voit que $a_n < a$: le disque a une aire strictement plus grande que le polygone régulier à n côtés de même périmètre. Mais quand n tend vers l'infini, $\frac{\tan(\pi/n)}{\pi/n}$ tend vers 1, donc a_n tend vers a.



Nous allons donner ici les idées clés pour démontrer le théorème isopérimétrique pour les polygones, sans rentrer dans les détails. Considérons un polygone convexe P à n côtés de périmètre fixé et d'aire maximale. Supposons que tous les côtés de ce polygone ne sont pas de même longueur : alors il existe deux côtés adjacents $[AB]$ et $[BC]$ de longueur distincte. Mais en considérant le triangle ABC, nous avons montré que nous pouvons déplacer B en B' pour obtenir un triangle $AB'C$ isocèle en B de même périmètre que ABC et d'aire strictement plus grande. Le polygone obtenu en remplaçant B par B' dans P a donc même périmètre que P mais une aire strictement plus grande, alors que nous avons supposé que P est d'aire maximale. P a donc tous ses côtés de même longueur.



Supposons à présent qu'il existe dans P deux angles $\widehat{ABC} > \widehat{DEF}$ non adjacents. En "tirant" B vers l'extérieur du polygone P et en "poussant" E vers l'intérieur de P, on peut déformer simultanément les 2 triangles ABC et DEF de façon à ce qu'ils restent tous deux isocèles et que la somme de leur périmètre reste constante. En revanche la somme de leurs aires varie, et on peut trouver des points B' et E' tels que la somme des aires de $AB'C$ et $DE'F$ soit strictement plus grande que celle des aires de ABC et DEF, ce qui contredit encore la maximalité de l'aire de P. Ainsi chaque angle de P est égal à tous les autres angles de P sauf peut être ses deux angles adjacents.



Nous avons déjà montré le résultat pour $n = 3$ et $n = 4$. Supposons $n \geq 5$. Soient $\hat{A}$ et $\hat{B}$ deux angles de P. S'ils ne sont pas adjacents, on a déjà montré que $\hat{A} = \hat{B}$. S'ils sont adjacents, puisque $n \geq 5$, il existe un autre angle $\hat{C}$ dans P qui n'est adjacent ni à $\hat{A}$ ni à $\hat{B}$, et alors on a montré que $\hat{A} = \hat{C} = \hat{B}$. Ainsi tous les angles de P sont égaux et donc P est bien le polygone régulier.

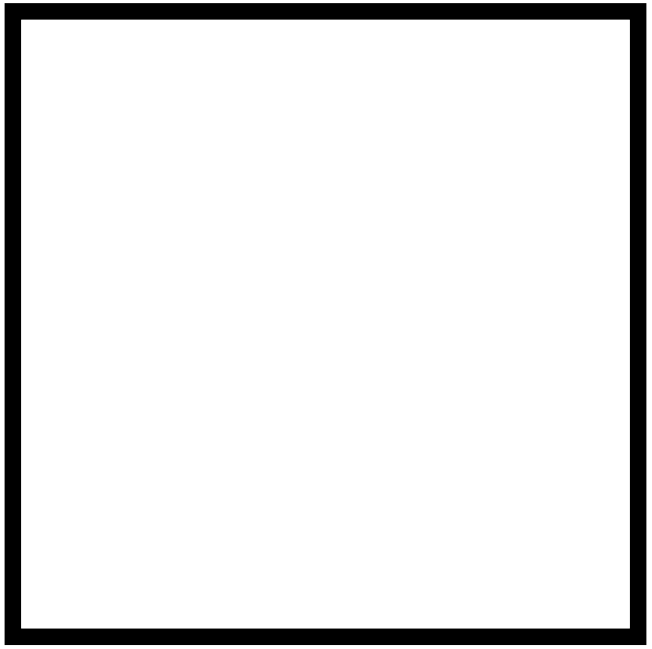
Pour conclure, considérons un polygone Q à n côtés non convexe, de périmètre p et d'aire a. Alors son enveloppe convexe Q' est un polygone convexe à n' côtés, $n' \leq n$, d'aire $a' > a$ et de périmètre $p' < p$. Or d'après le résultat précédent, a' est inférieure ou égale à $a_{n'}(p')$, l'aire du polygone régulier à n' côtés de périmètre p', et $a_{n'}(p') \leq a_n(p') \leq a_n(p)$, d'où $a < a_n(p)$, donc Q n'est pas solution du problème isopérimétrique.

Cutting squares into equal-area triangles

Jim Fowler

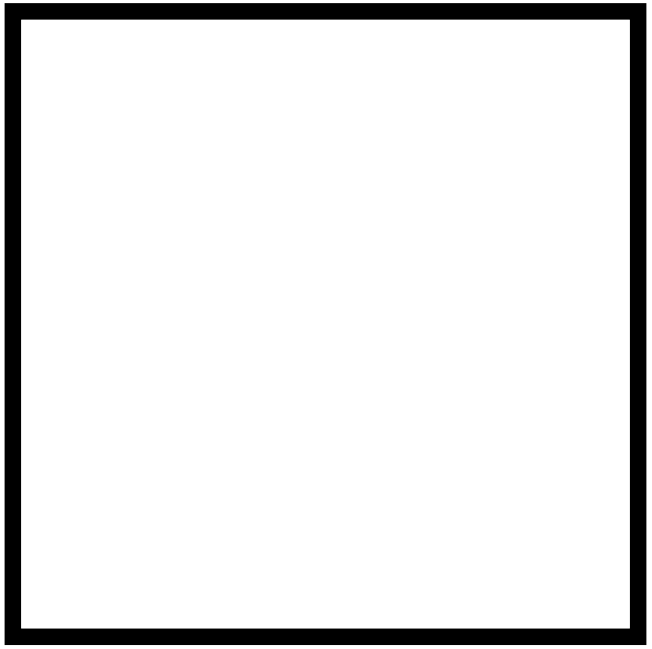
A talk for $\sqrt{\pi}$

Can you cut a square



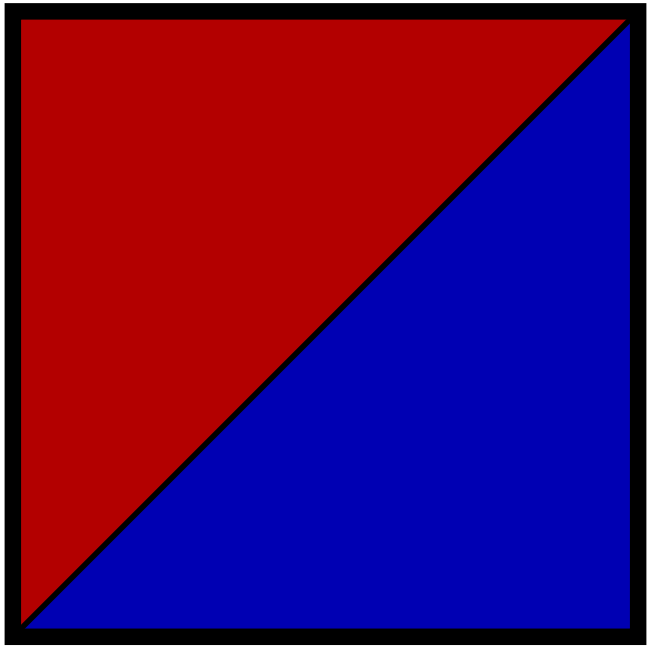
into equal-area triangles?

Can you cut a square



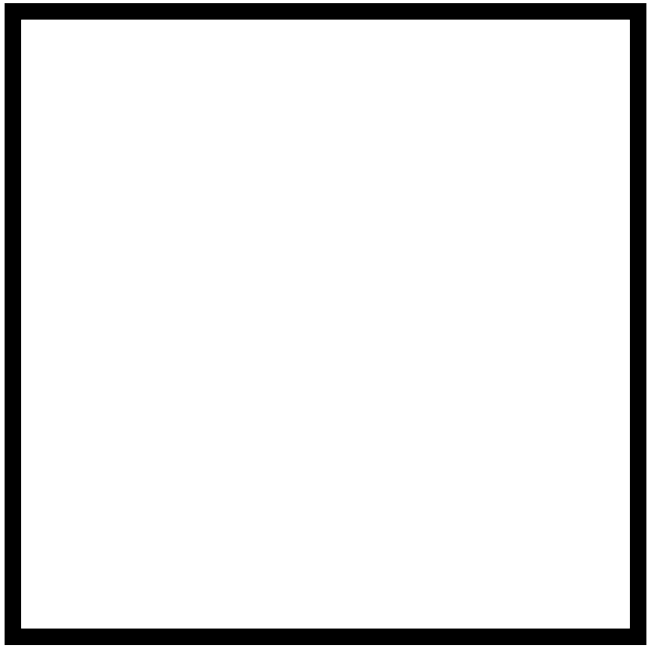
into 2 equal-area triangles?

Can you cut a square



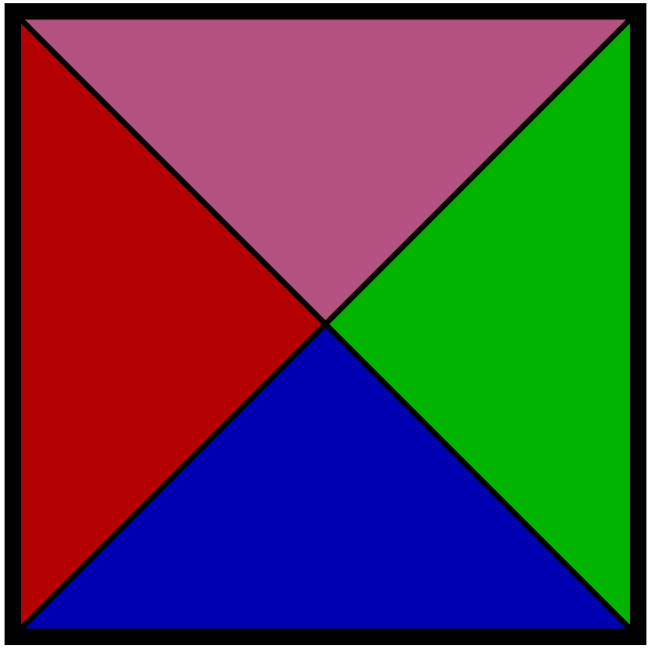
into 2 equal-area triangles? **Yes.**

Can you cut a square



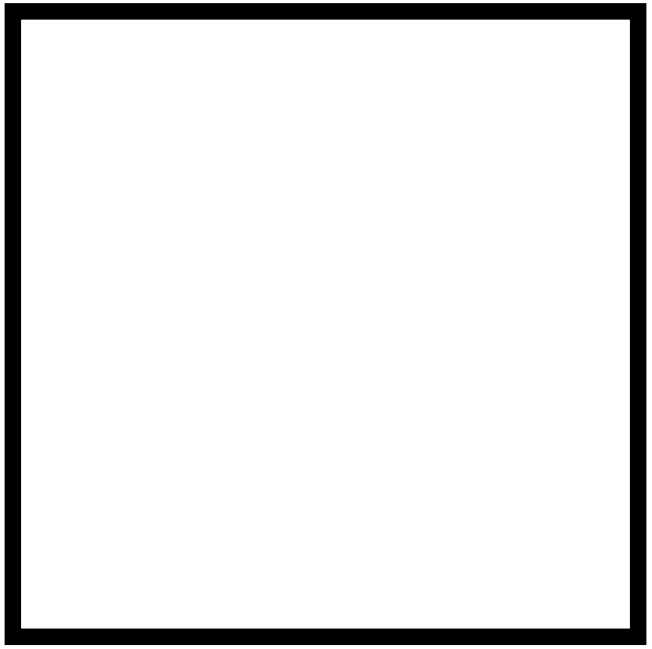
into 4 equal-area triangles?

Can you cut a square



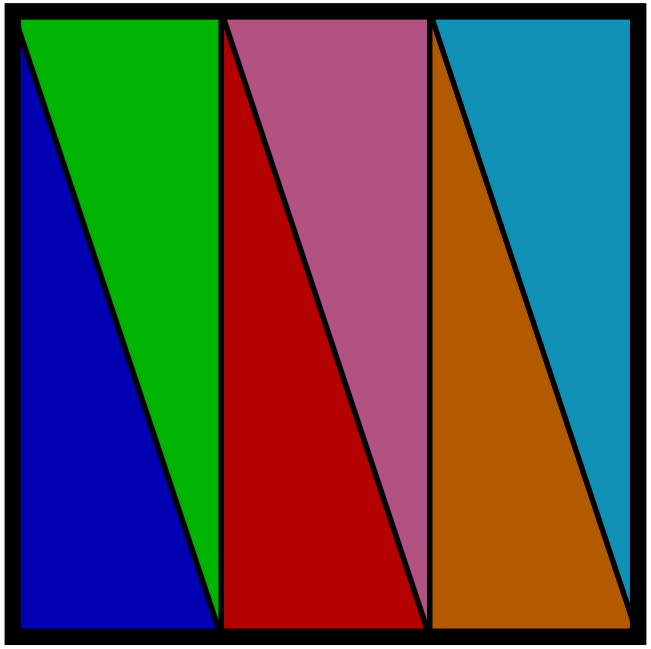
into 4 equal-area triangles? **Yes.**

Can you cut a square



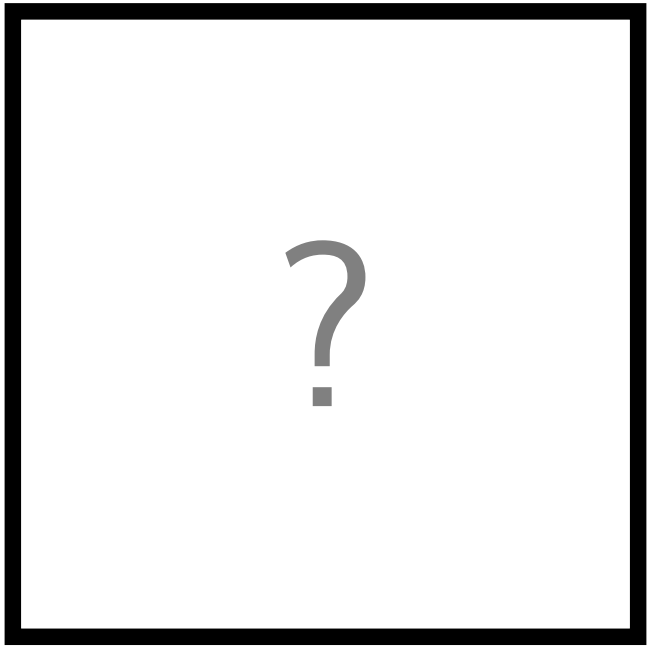
into 6 equal-area triangles?

Can you cut a square



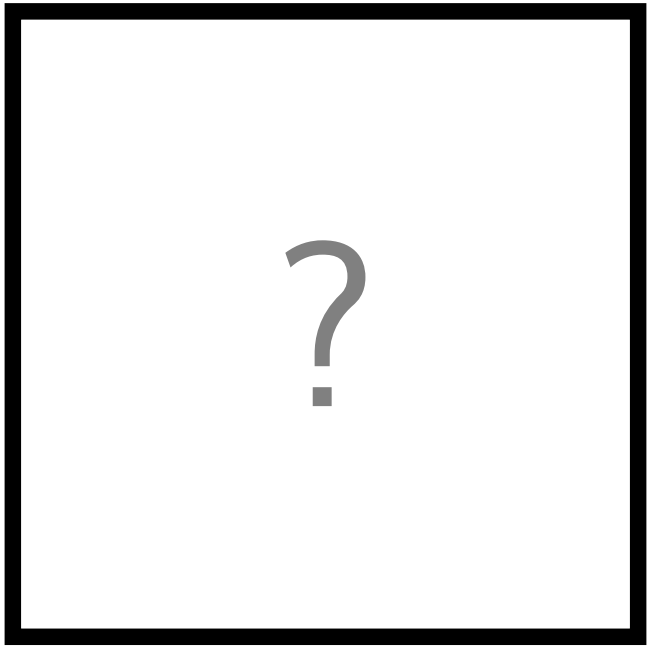
into 6 equal-area triangles? **Yes.**

Can you cut a square



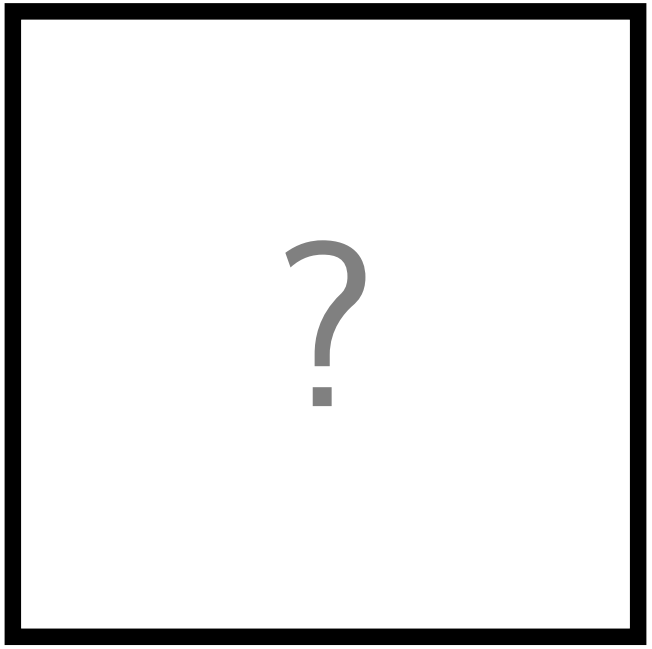
into **3** equal-area triangles?

Can you cut a square



into **5** equal-area triangles?

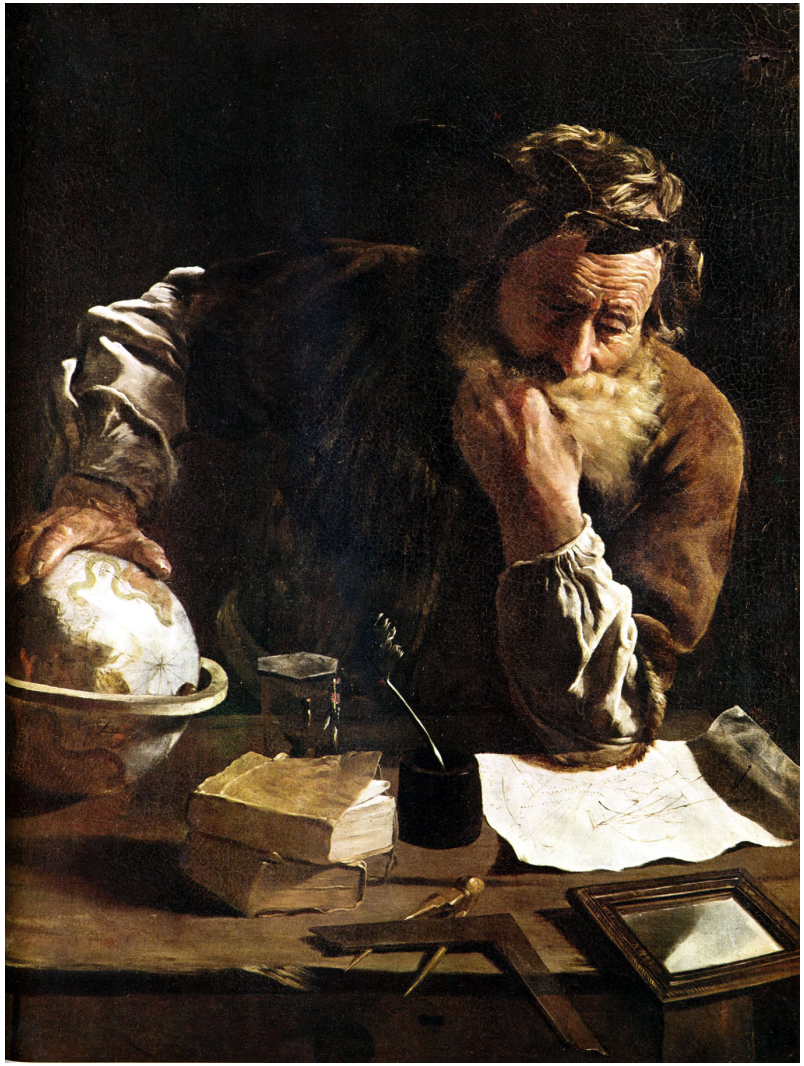
Can you cut a square



into an odd number of equal-area triangles?

Question

Can a square be divided into an odd number of triangles each having the same area?



This question could have been asked two thousand years ago!


How do we split
a square sandwich
among 5 friends?

Question

Can a square be divided into an odd number of triangles each having the same area?

Question

Can a square be divided into an odd number of triangles each having the same area?

Answer

No. It cannot be done.

Question

Can a square be divided into an odd number of triangles each having the same area?

Answer

No. It cannot be done.

Why not...?

The Proof

Two ingredients:

Sperner's Lemma

and a

2-adic valuation.

The Proof

Two ingredients:

Sperner's Lemma

and a

2-adic valuation.

Some Notation

$$a \equiv b \pmod 2$$

means a and b are **both even** or **both odd**,

Some Notation

$$a \equiv b \pmod 2$$

means a and b are **both even** or **both odd**,

means $a - b$ is divisible by two.

Some Notation

$$a \equiv b \pmod 2$$

means a and b are **both even** or **both odd**,
means $a - b$ is divisible by two.

"a is congruent to b, modulo two."

Some Notation

$$a \equiv b \pmod 2$$

means a and b are **both even** or **both odd**,
means $a - b$ is divisible by two.

"a is congruent to b, modulo two."

$1 \equiv 3 \pmod 2$,

Some Notation

$$a \equiv b \pmod 2$$

means a and b are **both even** or **both odd**,
means $a - b$ is divisible by two.

"a is congruent to b, modulo two."

$1 \equiv 3 \pmod 2$, but $2 \not\equiv 5 \pmod 2$.

Some Notation

$$a \equiv b \pmod 2$$

means a and b are **both even** or **both odd**,
means $a - b$ is divisible by two.

"a is congruent to b, modulo two."

$1 \equiv 3 \pmod 2$, but $2 \not\equiv 5 \pmod 2$.
$0 \equiv 16 \pmod 2$,

Some Notation

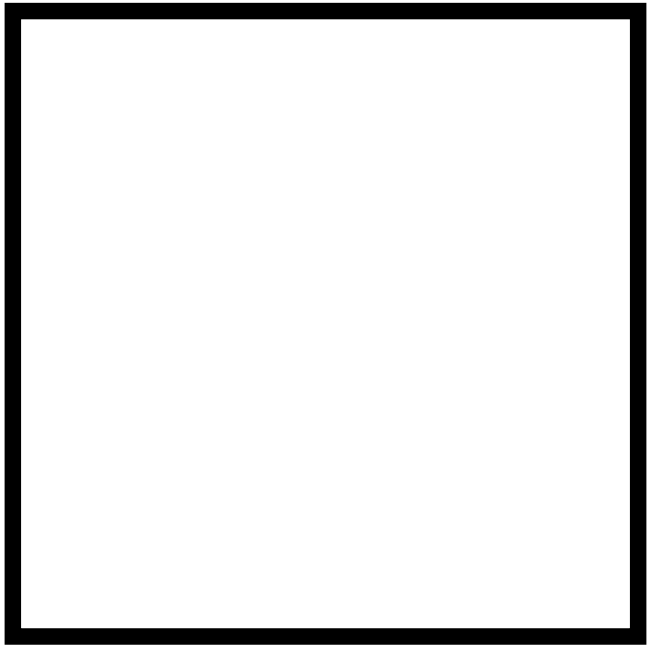
$$a \equiv b \pmod 2$$

means a and b are **both even** or **both odd**,
means $a - b$ is divisible by two.

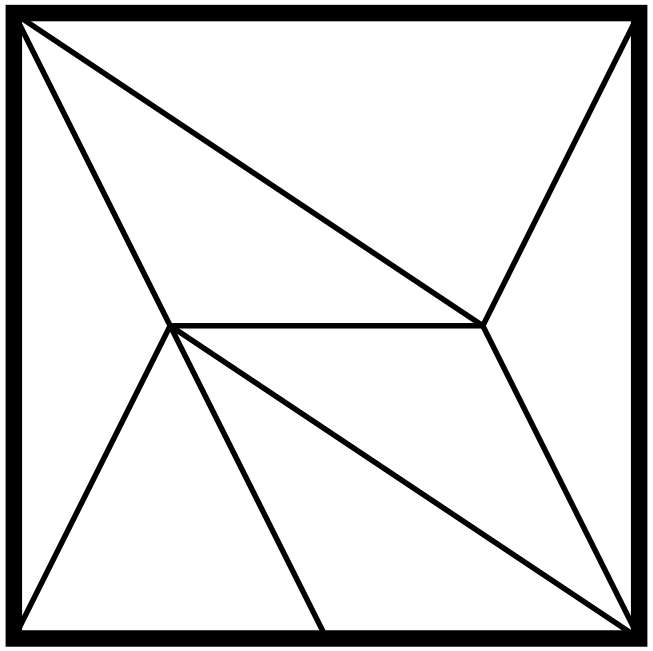
"a is congruent to b, modulo two."

$1 \equiv 3 \pmod 2$, but $2 \not\equiv 5 \pmod 2$.
$0 \equiv 16 \pmod 2$, but $1 \not\equiv 2 \pmod 2$.

Sperner's Lemma

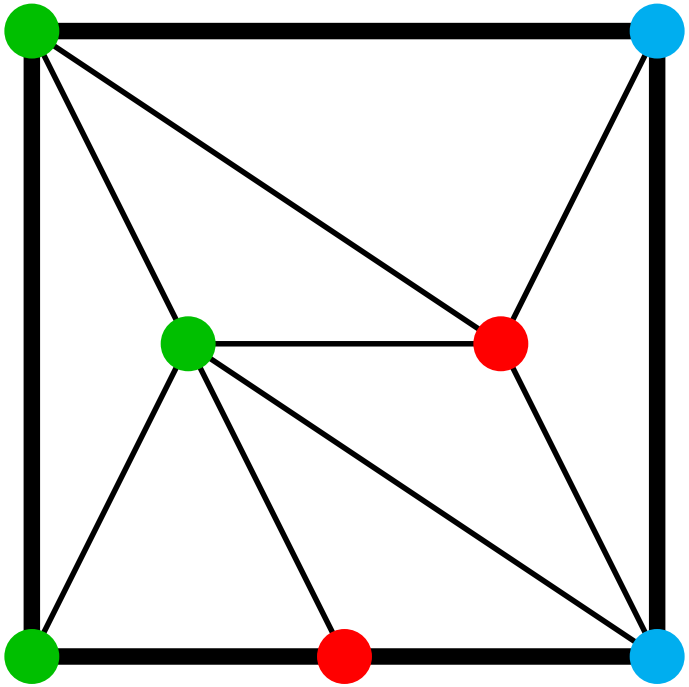


Sperner's Lemma



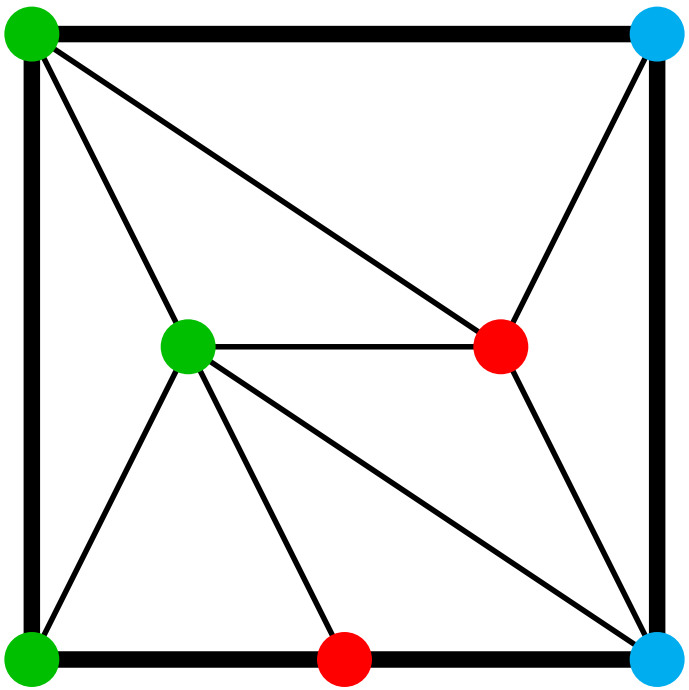
Triangulate.

Sperner's Lemma



Triangulate. **Color** vertices **A**, **B**, or **C**.

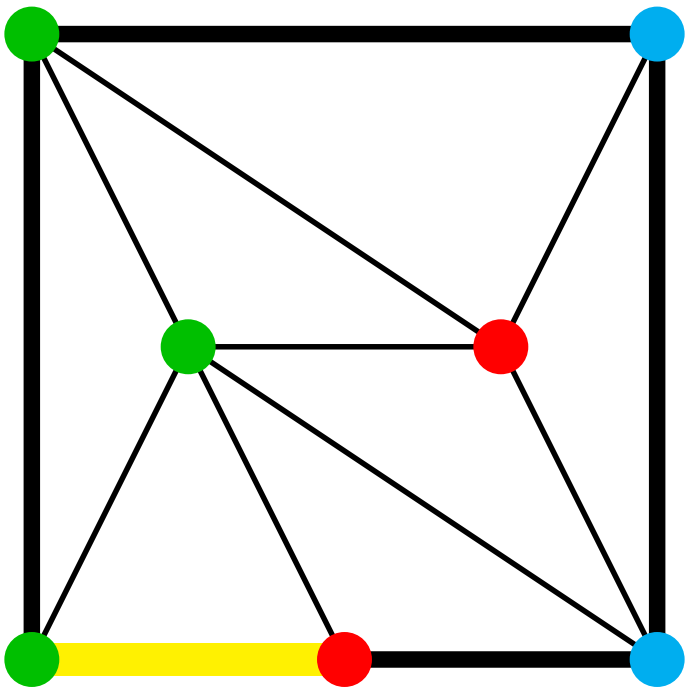
Sperner's Lemma



Triangulate. **Color** vertices **A**, **B**, or **C**.

$$\begin{array}{c}\textbf{AB}\text{ edges}\\ \text{on perimeter}\end{array} \equiv \begin{array}{c}\textbf{ABC}\\ \text{triangles}\end{array} \pmod 2$$

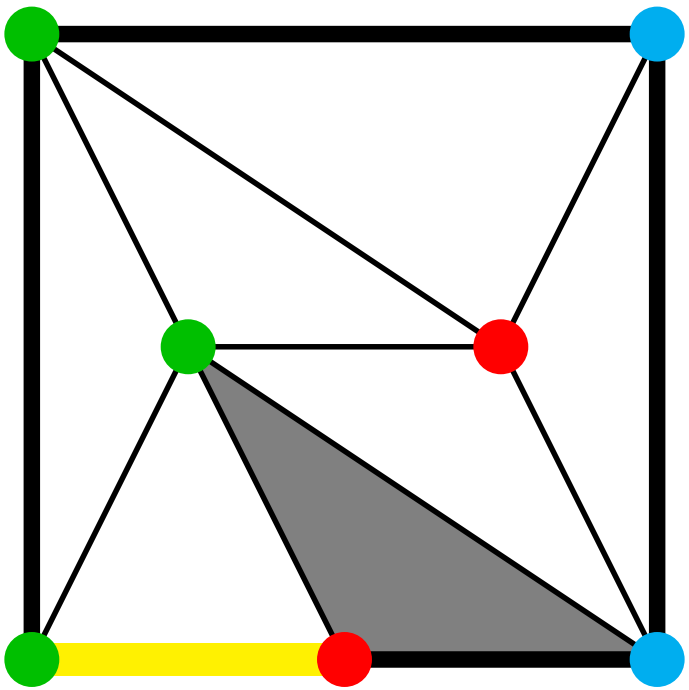
Sperner's Lemma



Triangulate. **Color** vertices **A**, **B**, or **C**.

$$\begin{array}{c}\textbf{AB}\text{ edges}\\ \text{on perimeter}\end{array} \equiv \begin{array}{c}\textbf{ABC}\\ \text{triangles}\end{array} \pmod 2$$

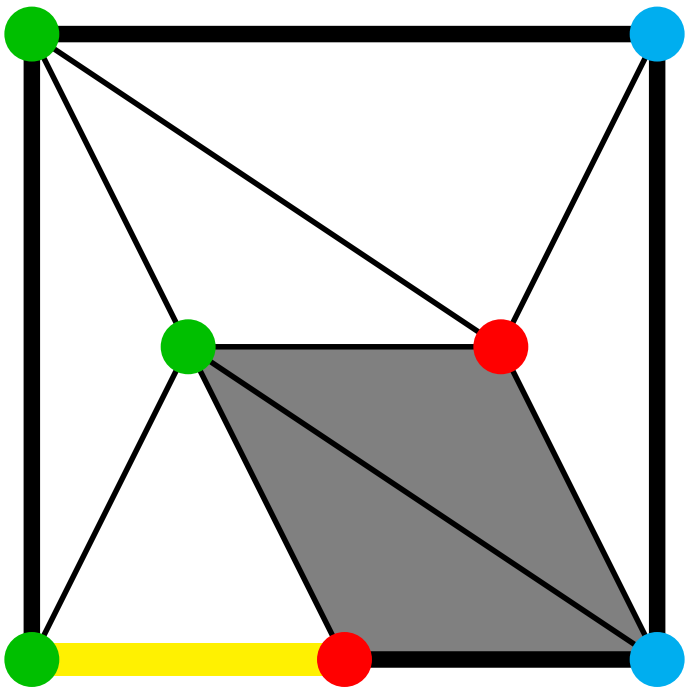
Sperner's Lemma



Triangulate. **Color** vertices **A**, **B**, or **C**.

$$\begin{array}{c}\textbf{AB}\text{ edges}\\ \text{on perimeter}\end{array} \equiv \begin{array}{c}\textbf{ABC}\\ \text{triangles}\end{array} \pmod 2$$

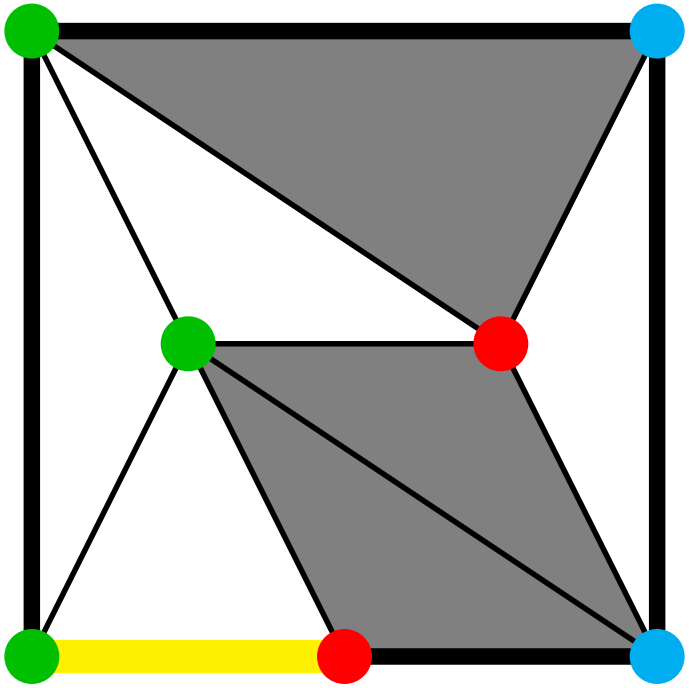
Sperner's Lemma



Triangulate. **Color** vertices **A**, **B**, or **C**.

$$\begin{array}{c}\textbf{AB}\text{ edges}\\ \text{on perimeter}\end{array} \equiv \begin{array}{c}\textbf{ABC}\\ \text{triangles}\end{array} \pmod 2$$

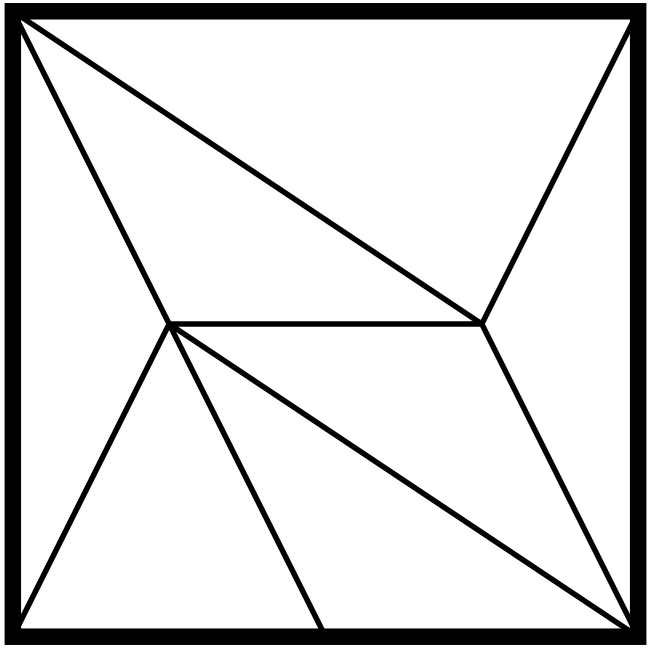
Sperner's Lemma



Triangulate. **Color** vertices **A**, **B**, or **C**.

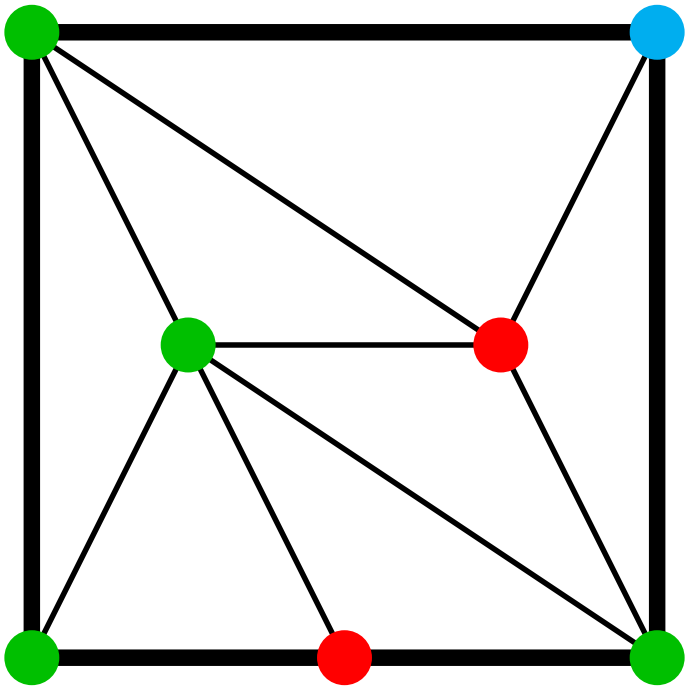
$$\begin{array}{c}\textbf{AB}\text{ edges}\\ \text{on perimeter}\end{array} \equiv \begin{array}{c}\textbf{ABC}\\ \text{triangles}\end{array} \pmod 2$$

It doesn't matter how we color the vertices.



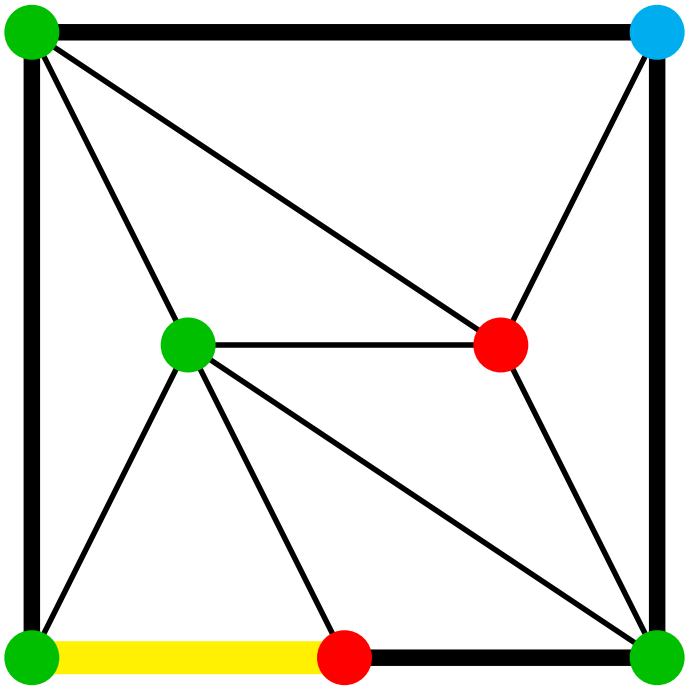
$$\begin{array}{c}\textbf{AB}\text{ edges}\\ \text{on perimeter}\end{array} \equiv \begin{array}{c}\textbf{ABC}\\ \text{triangles}\end{array} \pmod 2$$

It doesn't matter how we color the vertices.



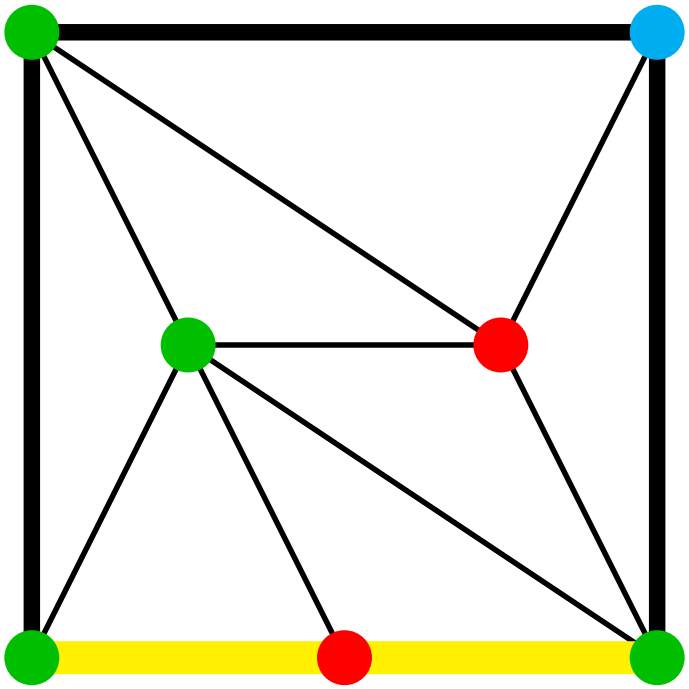
$$\begin{array}{c}\textbf{AB}\text{ edges}\\ \text{on perimeter}\end{array} \equiv \begin{array}{c}\textbf{ABC}\\ \text{triangles}\end{array} \pmod 2$$

It doesn't matter how we color the vertices.



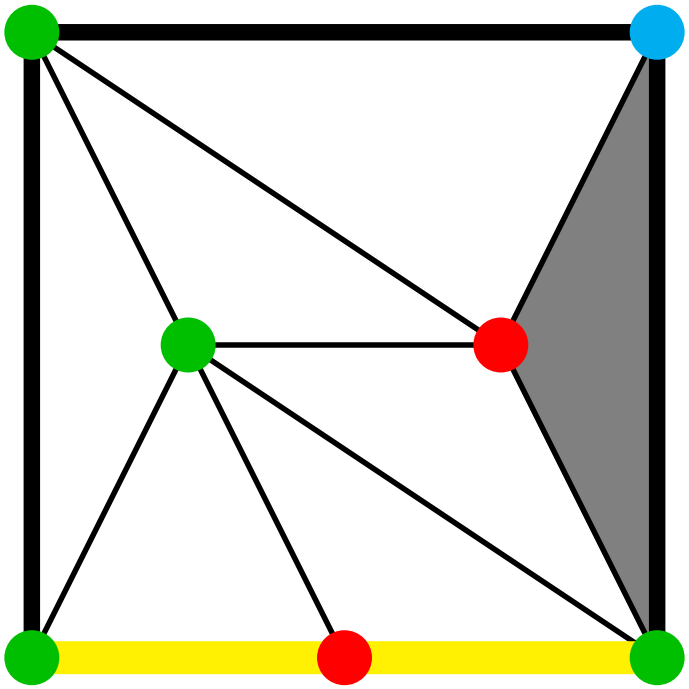
$$\begin{array}{c}\textbf{AB}\text{ edges}\\ \text{on perimeter}\end{array} \equiv \begin{array}{c}\textbf{ABC}\\ \text{triangles}\end{array} \pmod 2$$

It doesn't matter how we color the vertices.



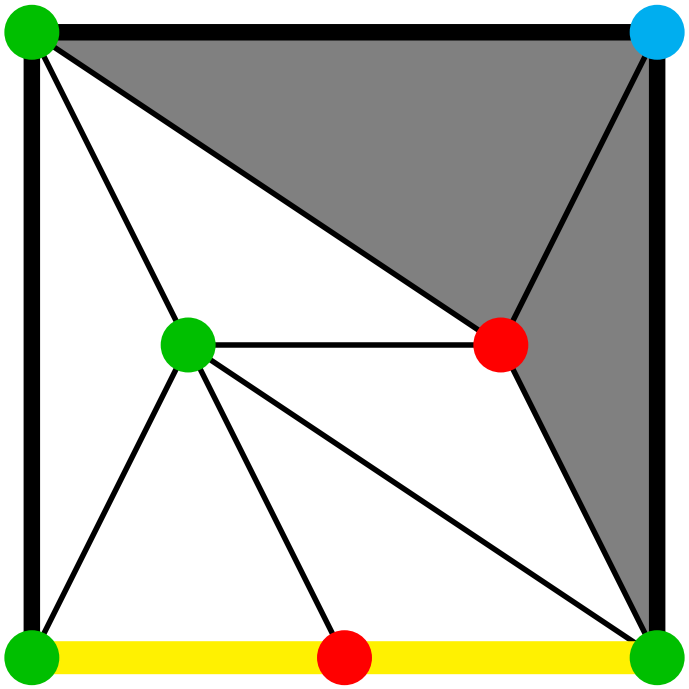
$$\begin{array}{c}\textbf{AB}\text{ edges}\\ \text{on perimeter}\end{array} \equiv \begin{array}{c}\textbf{ABC}\\ \text{triangles}\end{array} \pmod 2$$

It doesn't matter how we color the vertices.



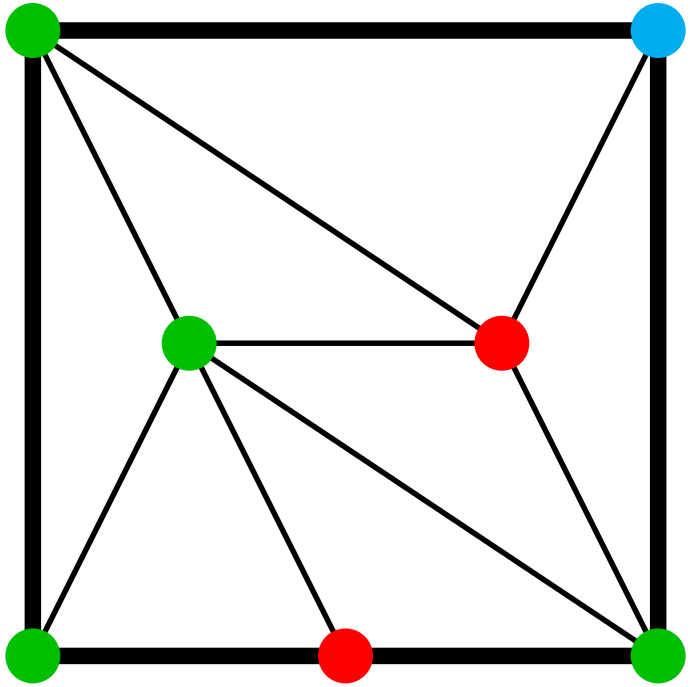
$$\begin{array}{c}\textbf{AB}\text{ edges}\\ \text{on perimeter}\end{array} \equiv \begin{array}{c}\textbf{ABC}\\ \text{triangles}\end{array} \pmod 2$$

It doesn't matter how we color the vertices.



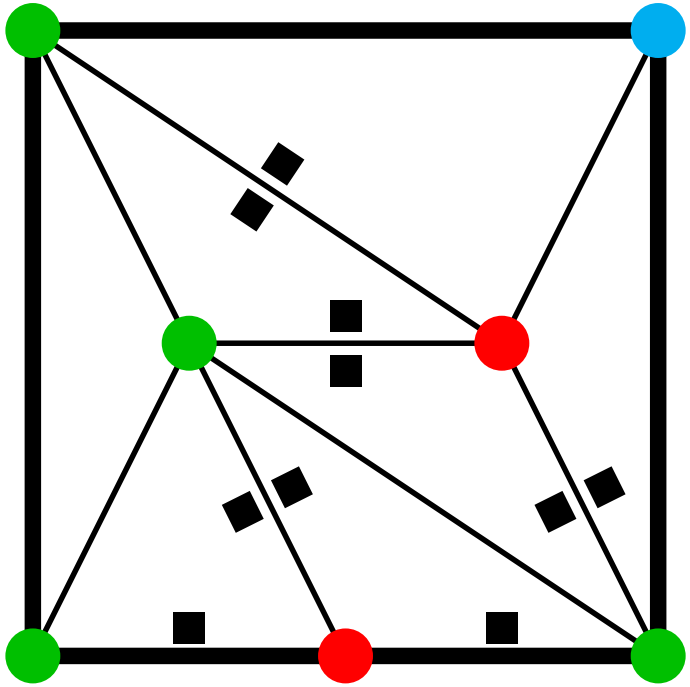
$$\begin{array}{c}\textbf{AB}\text{ edges}\\ \text{on perimeter}\end{array} \equiv \begin{array}{c}\textbf{ABC}\\ \text{triangles}\end{array} \pmod 2$$

A Proof of Sperner's Lemma



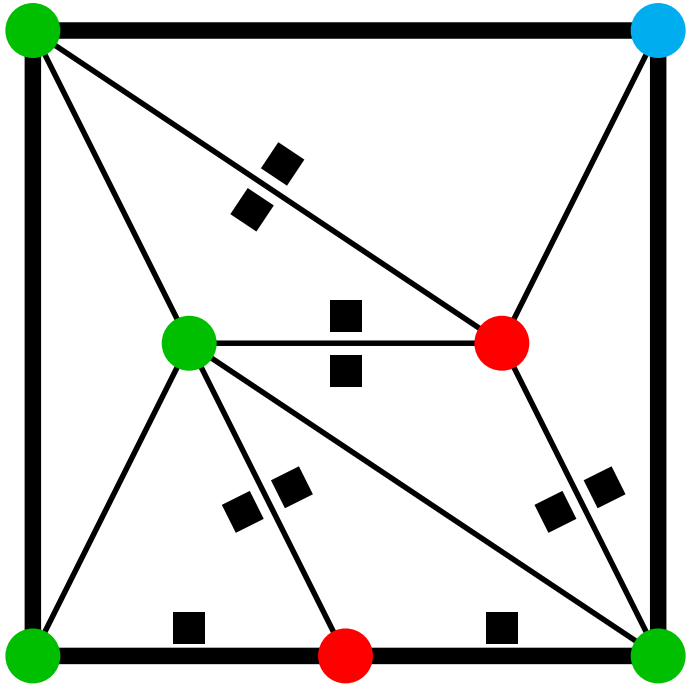
A Proof of Sperner's Lemma

On the inside of the square, on each side of **A**B edges, place a pebble.



A Proof of Sperner's Lemma

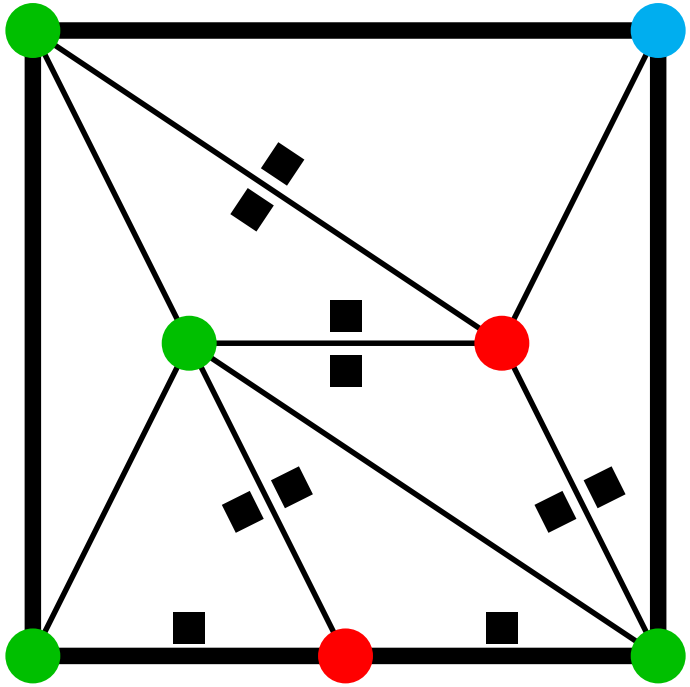
On the inside of the square, on each side of **AB** edges, place a pebble.



Count the pebbles

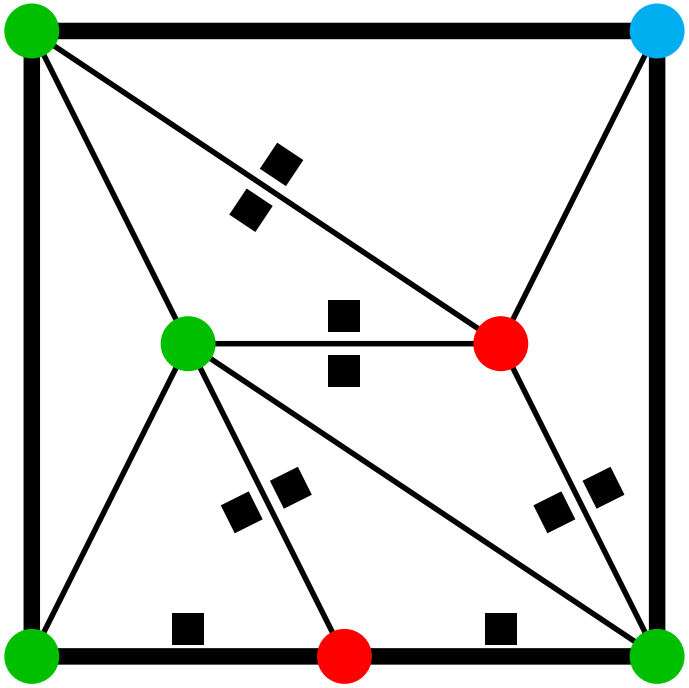
A Proof of Sperner's Lemma

On the inside of the square, on each side of **AB** edges, place a pebble.

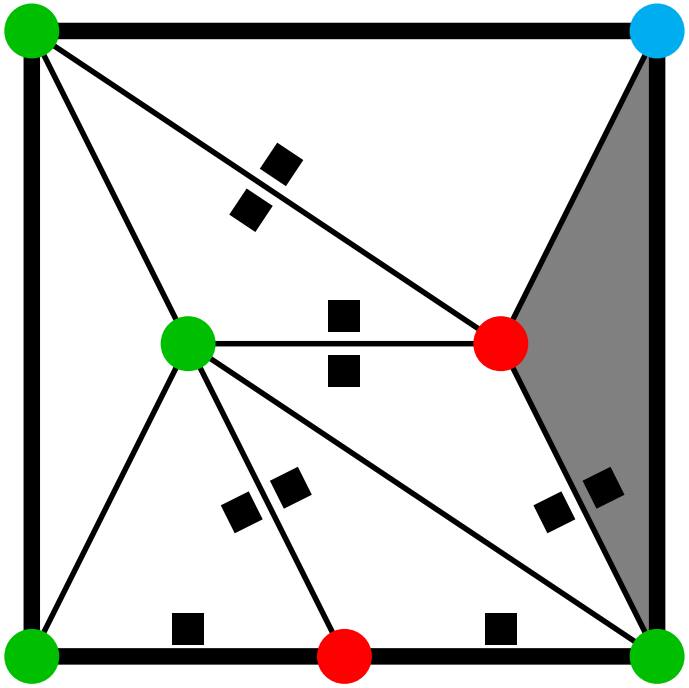


Count the pebbles—in two different ways.

A Proof of Sperner's Lemma

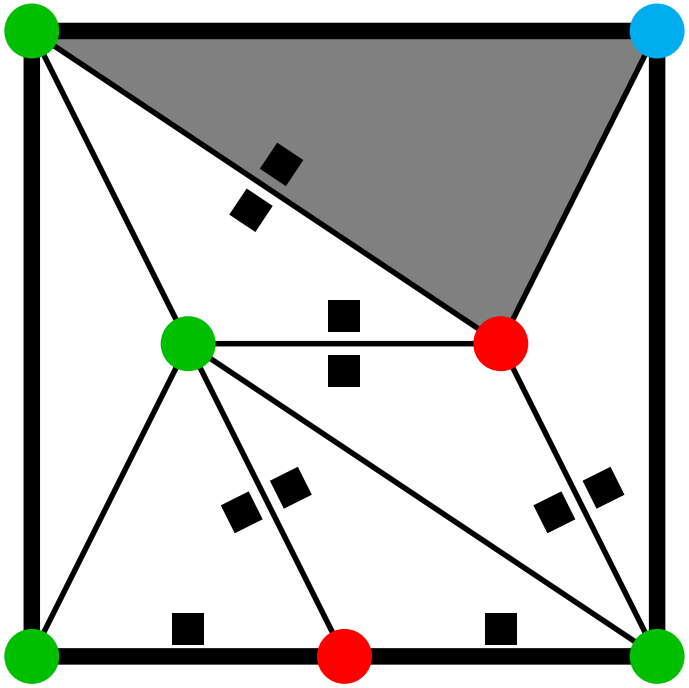


A Proof of Sperner's Lemma



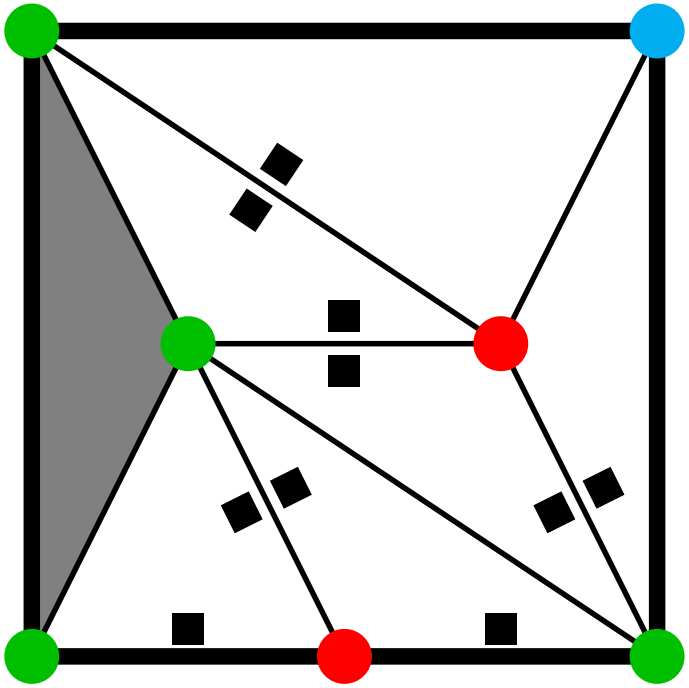
Each **ABC** triangle gives one pebble.

A Proof of Sperner's Lemma



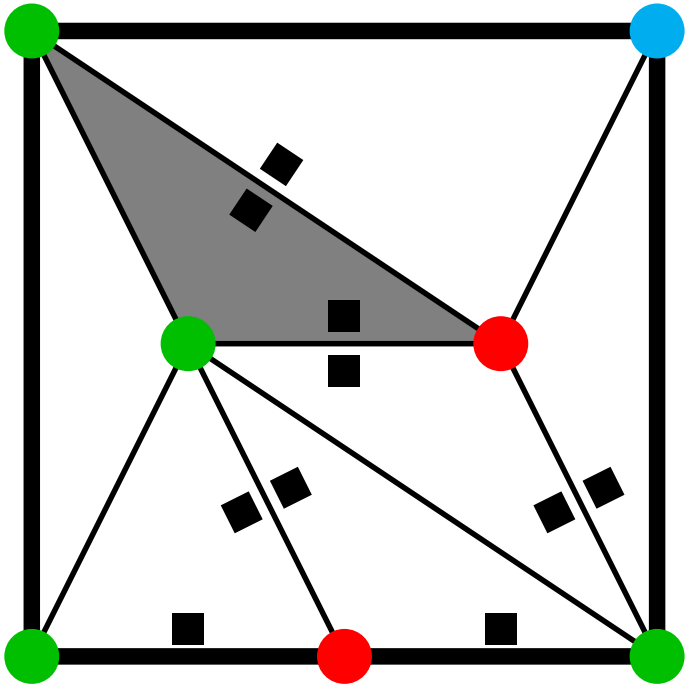
Each **ABC** triangle gives one pebble.

A Proof of Sperner's Lemma



Each **ABC** triangle gives one pebble.
Other triangles give zero or two pebbles.

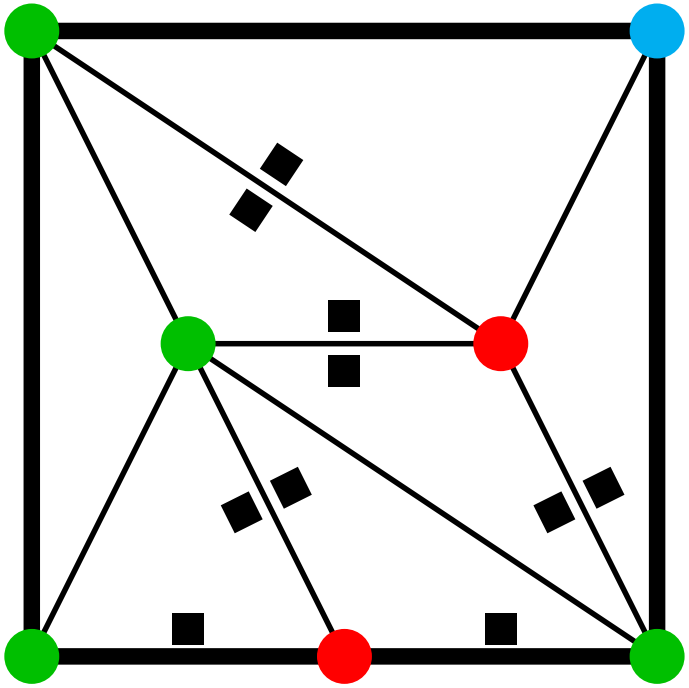
A Proof of Sperner's Lemma



Each **ABC** triangle gives one pebble.

Other triangles give zero or two pebbles.

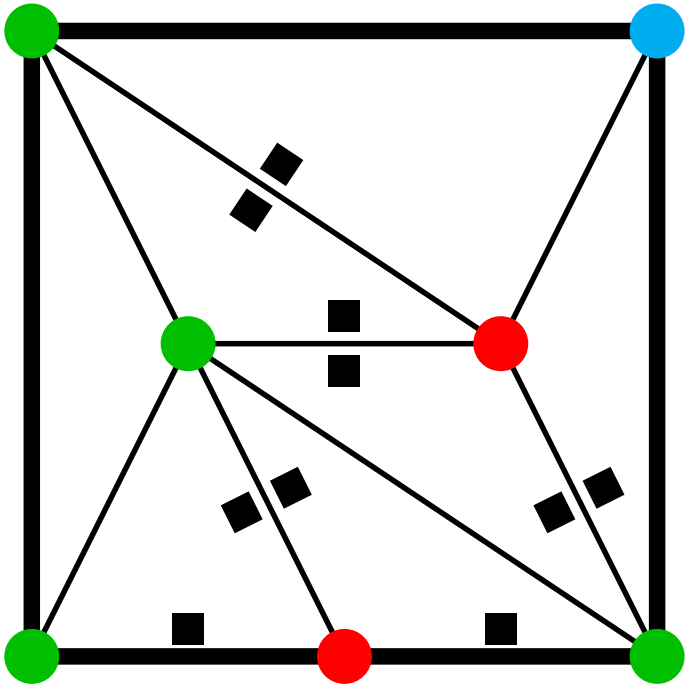
A Proof of Sperner's Lemma



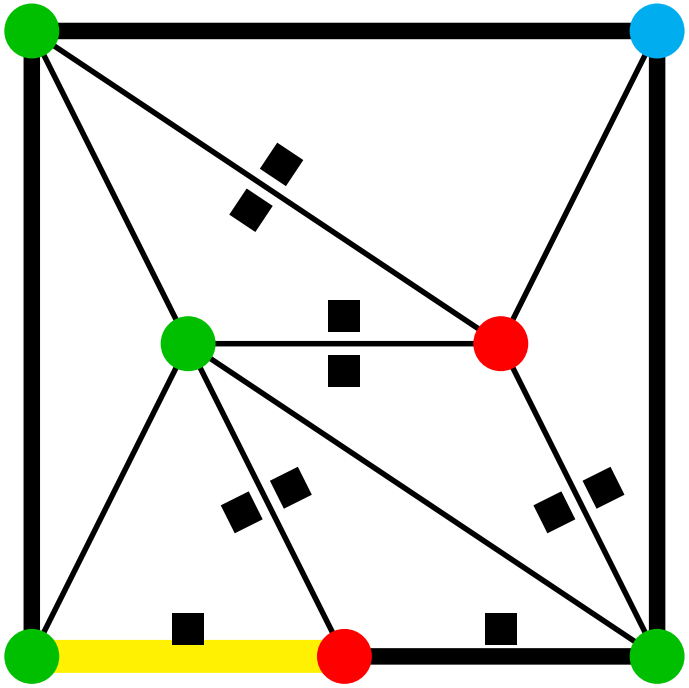
Each **ABC** triangle gives one pebble.
Other triangles give zero or two pebbles.

$$\text{pebbles} \equiv \begin{matrix}\textbf{ABC}\\ \text{triangles}\end{matrix} \pmod 2$$

A Proof of Sperner's Lemma

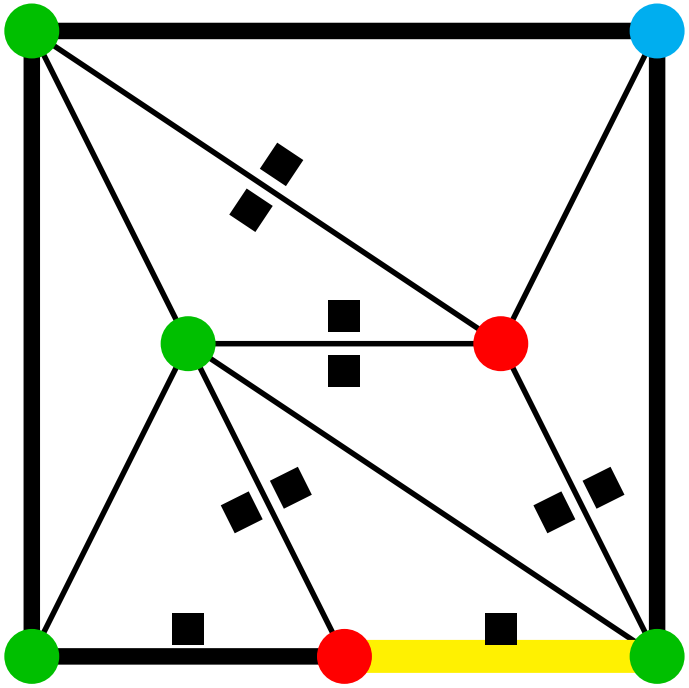


A Proof of Sperner's Lemma



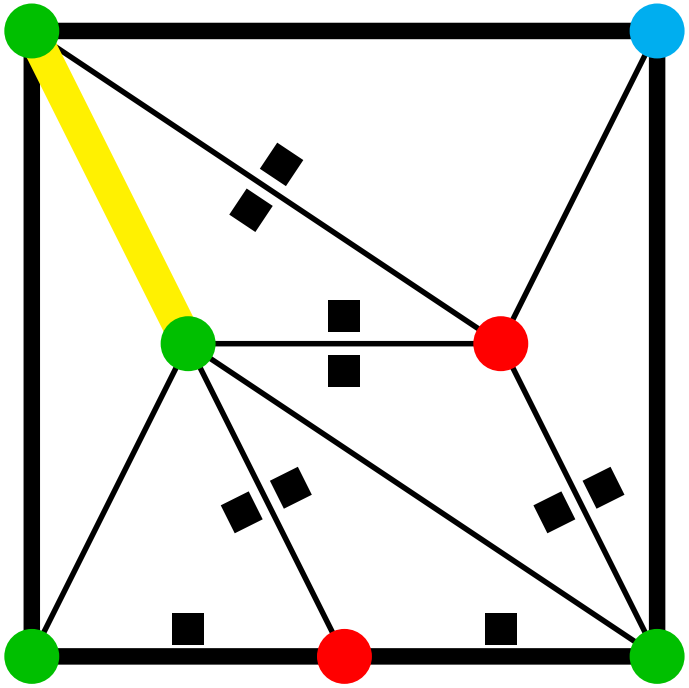
Each **AB** edge on the perimeter gives one pebble.

A Proof of Sperner's Lemma



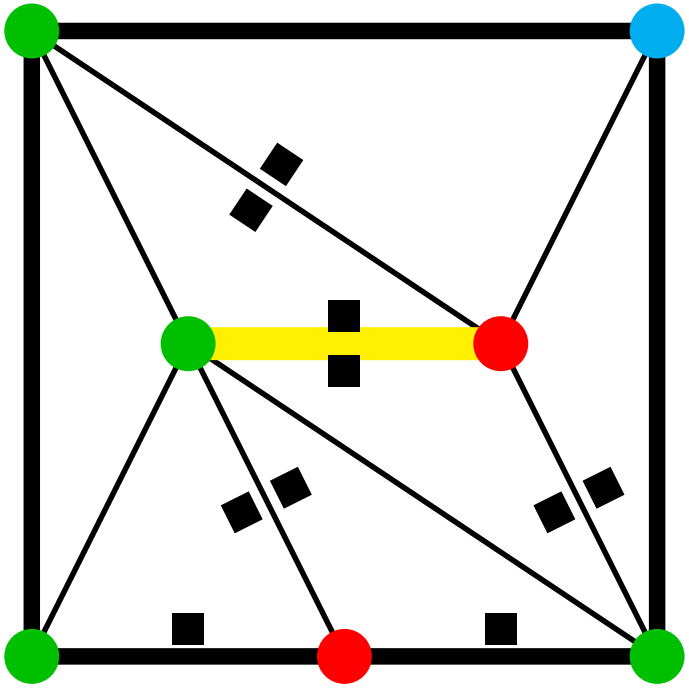
Each **AB** edge on the perimeter gives one pebble.

A Proof of Sperner's Lemma



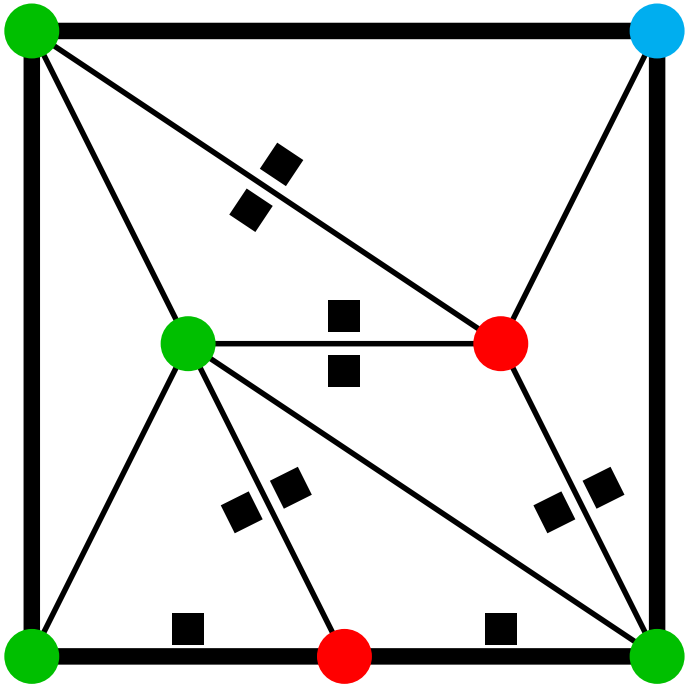
Each **AB** edge on the perimeter gives one pebble. Other edges give zero or two pebbles.

A Proof of Sperner's Lemma



Each **AB** edge on the perimeter gives one pebble. Other edges give zero or two pebbles.

A Proof of Sperner's Lemma



Each **AB** edge on the perimeter gives one pebble. Other edges give zero or two pebbles.

$$\text{pebbles} \equiv \begin{array}{c}\textbf{AB}\text{ edges}\\ \text{on perimeter}\end{array} \pmod 2$$

Proof of Sperner's Lemma

$$\underset{\text{triangles}}{\textbf{ABC}} \equiv \text{pebbles} \pmod 2$$

Proof of Sperner's Lemma

$$\begin{matrix}\textbf{ABC}\\ \text{triangles}\end{matrix} \equiv \text{pebbles} \pmod 2 \text{ and}$$

$$\begin{matrix}\textbf{AB}\ \text{edges}\\ \text{on perimeter}\end{matrix} \equiv \text{pebbles} \pmod 2$$

Proof of Sperner's Lemma

$$\begin{matrix}\textbf{ABC}\\ \text{triangles}\end{matrix} \equiv \text{pebbles} \pmod 2 \text{ and}$$

$$\begin{matrix}\textbf{AB}\ \text{edges}\\ \text{on perimeter}\end{matrix} \equiv \text{pebbles} \pmod 2 \text{ so}$$

$$\begin{matrix}\textbf{AB}\ \text{edges}\\ \text{on perimeter}\end{matrix} \equiv \begin{matrix}\textbf{ABC}\\ \text{triangles}\end{matrix} \pmod 2.$$

Sperner's Lemma

No matter how you triangulate,
or how you color the vertices,

the number of perimeter **AB** edges, and
the number of **ABC** triangles

are both odd or both even.

Applying Sperner's Lemma

An odd number of perimeter **AB** edges $\Rightarrow$
An odd number of **ABC** triangles.

Applying Sperner's Lemma

An odd number of perimeter **AB** edges $\Rightarrow$
An odd number of **ABC** triangles.

An odd number of perimeter **AB** edges $\Rightarrow$
there exists an **ABC** triangle!

The Proof

Two ingredients:

Sperner's Lemma

and a

2-adic valuation.

The Proof

Two ingredients:

Sperner's Lemma

and a

2-adic valuation.

2-adic valuation

In addition to Sperner's lemma,
we need a **2-adic valuation**.

2-adic valuation

In addition to Sperner's lemma,
we need a **2-adic valuation**.

Before talking about *2-adic* valuations, let's talk about valuations.

Valuations

Absolute value is an example of a valuation.

Valuations

Absolute value is an example of a valuation.

A **valuation** measures how big a number is.

Valuations

Absolute value is an example of a valuation.

A **valuation** measures how big a number is.

A **valuation** is a function $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $|x| \geq 0$ for all $x \in \mathbb{R}$.

Valuations

Absolute value is an example of a valuation.

A **valuation** measures how big a number is.

A **valuation** is a function $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $|x| \geq 0$ for all $x \in \mathbb{R}$.
- $|x| = 0$ if and only if $x = 0$.

Valuations

Absolute value is an example of a valuation.

A **valuation** measures how big a number is.

A **valuation** is a function $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $|x| \geq 0$ for all $x \in \mathbb{R}$.
- $|x| = 0$ if and only if $x = 0$.
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

Valuations

Absolute value is an example of a valuation.

A **valuation** measures how big a number is.

A **valuation** is a function $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $|x| \geq 0$ for all $x \in \mathbb{R}$.
- $|x| = 0$ if and only if $x = 0$.
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
- $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Valuations

Absolute value is an example of a valuation.

A **valuation** measures how big a number is.

A **valuation** is a function $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $|x| \geq 0$ for all $x \in \mathbb{R}$.
- $|x| = 0$ if and only if $x = 0$.
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
- $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Are there other valuations?

2-adic valuation

A rational number $x = p/q$ can be written as

$$x = 2^n \cdot \frac{a}{b} \text{ for odd numbers } a \text{ and } b.$$

2-adic valuation

A rational number $x = p/q$ can be written as

$$x = 2^n \cdot \frac{a}{b} \text{ for odd numbers } a \text{ and } b.$$

The **2-adic valuation** of x is

$$|x|_2 = (1/2)^n.$$

2-adic valuation

A rational number $x = p/q$ can be written as

$$x = 2^n \cdot \frac{a}{b} \text{ for odd numbers } a \text{ and } b.$$

The **2-adic valuation** of x is

$$|x|_2 = (1/2)^n.$$

This is a different way of measuring the size of a number

2-adic valuation

A rational number $x = p/q$ can be written as

$$x = 2^n \cdot \frac{a}{b} \text{ for odd numbers } a \text{ and } b.$$

The **2-adic valuation** of x is

$$|x|_2 = (1/2)^n.$$

This is a different way of measuring the size of a number—numbers that are divisible by powers of two are small.

2-adic valuation

a and b odd, $x = 2^n \cdot \dfrac{a}{b} \Rightarrow |x|_2 = (1/2)^n$.

2-adic valuation

a and b odd, $x = 2^n \cdot \dfrac{a}{b} \Rightarrow |x|_2 = (1/2)^n$.

$$|0|_2 = 0?$$

2-adic valuation

a and b odd, $x = 2^n \cdot \dfrac{a}{b} \Rightarrow |x|_2 = (1/2)^n$.

$$|0|_2 = 0$$

$$|1|_2 =$$

2-adic valuation

a and b odd, $x = 2^n \cdot \dfrac{a}{b} \Rightarrow |x|_2 = (1/2)^n$.

$$|0|_2 = 0$$

$$|1|_2 = 1$$

2-adic valuation

a and b odd, $x = 2^n \cdot \frac{a}{b} \Rightarrow |x|_2 = (1/2)^n$.

$$|0|_2 = 0$$

$$|1|_2 = 1$$

$$|2|_2 =$$

2-adic valuation

a and b odd, $x = 2^n \cdot \frac{a}{b} \Rightarrow |x|_2 = (1/2)^n$.

$$|0|_2 = 0$$
$$|1|_2 = 1$$
$$|2|_2 = 1/2$$

2-adic valuation

a and b odd, $x = 2^n \cdot \dfrac{a}{b} \Rightarrow |x|_2 = (1/2)^n$.

$$|0|_2 = 0$$
$$|1|_2 = 1$$
$$|2|_2 = 1/2$$
$$|6|_2 =$$

2-adic valuation

a and b odd, $x = 2^n \cdot \dfrac{a}{b} \Rightarrow |x|_2 = (1/2)^n$.

$$|0|_2 = 0$$
$$|1|_2 = 1$$
$$|2|_2 = 1/2$$
$$|6|_2 = 1/2$$

2-adic valuation

a and b odd, $x = 2^n \cdot \frac{a}{b} \Rightarrow |x|_2 = (1/2)^n$.

$$|0|_2 = 0$$
$$|1|_2 = 1$$
$$|2|_2 = 1/2$$
$$|6|_2 = 1/2$$
$$|4|_2 =$$

2-adic valuation

a and b odd, $x = 2^n \cdot \frac{a}{b} \Rightarrow |x|_2 = (1/2)^n$.

$$|0|_2 = 0$$
$$|1|_2 = 1$$
$$|2|_2 = 1/2$$
$$|6|_2 = 1/2$$
$$|4|_2 = 1/4$$

2-adic valuation

a and b odd, $x = 2^n \cdot \dfrac{a}{b} \Rightarrow |x|_2 = (1/2)^n$.

$$|0|_2 = 0$$
$$|1|_2 = 1$$
$$|2|_2 = 1/2$$
$$|6|_2 = 1/2$$
$$|4|_2 = 1/4$$
$$|20|_2 =$$

2-adic valuation

a and b odd, $x = 2^n \cdot \dfrac{a}{b} \Rightarrow |x|_2 = (1/2)^n$.

$$|0|_2 = 0$$
$$|1|_2 = 1$$
$$|2|_2 = 1/2$$
$$|6|_2 = 1/2$$
$$|4|_2 = 1/4$$
$$|20|_2 = 1/4$$

2-adic valuation

a and b odd, $x = 2^n \cdot \dfrac{a}{b} \Rightarrow |x|_2 = (1/2)^n$.

$$|0|_2 = 0$$
$$|1|_2 = 1$$
$$|2|_2 = 1/2$$
$$|6|_2 = 1/2$$
$$|4|_2 = 1/4$$
$$|20|_2 = 1/4$$

$$|1/3|_2 =$$

2-adic valuation

a and b odd, $x = 2^n \cdot \dfrac{a}{b} \Rightarrow |x|_2 = (1/2)^n$.

$$|0|_2 = 0$$
$$|1|_2 = 1$$
$$|2|_2 = 1/2$$
$$|6|_2 = 1/2$$
$$|4|_2 = 1/4$$
$$|20|_2 = 1/4$$

$$|1/3|_2 = 1$$

2-adic valuation

a and b odd, $x = 2^n \cdot \dfrac{a}{b} \Rightarrow |x|_2 = (1/2)^n$.

$$|0|_2 = 0$$
$$|1|_2 = 1$$
$$|2|_2 = 1/2$$
$$|6|_2 = 1/2$$
$$|4|_2 = 1/4$$
$$|20|_2 = 1/4$$

$$|1/3|_2 = 1$$
$$|5/3|_2 =$$

2-adic valuation

a and b odd, $x = 2^n \cdot \dfrac{a}{b} \Rightarrow |x|_2 = (1/2)^n$.

$$|0|_2 = 0$$
$$|1|_2 = 1$$
$$|2|_2 = 1/2$$
$$|6|_2 = 1/2$$
$$|4|_2 = 1/4$$
$$|20|_2 = 1/4$$

$$|1/3|_2 = 1$$
$$|5/3|_2 = 1$$

2-adic valuation

a and b odd, $x = 2^n \cdot \dfrac{a}{b} \Rightarrow |x|_2 = (1/2)^n$.

$$|0|_2 = 0$$
$$|1|_2 = 1$$
$$|2|_2 = 1/2$$
$$|6|_2 = 1/2$$
$$|4|_2 = 1/4$$
$$|20|_2 = 1/4$$

$$|1/3|_2 = 1$$
$$|5/3|_2 = 1$$
$$|1/4|_2 =$$

2-adic valuation

a and b odd, $x = 2^n \cdot \dfrac{a}{b} \Rightarrow |x|_2 = (1/2)^n$.

$$|0|_2 = 0$$
$$|1|_2 = 1$$
$$|2|_2 = 1/2$$
$$|6|_2 = 1/2$$
$$|4|_2 = 1/4$$
$$|20|_2 = 1/4$$

$$|1/3|_2 = 1$$
$$|5/3|_2 = 1$$
$$|1/4|_2 = 4$$

2-adic valuation

a and b odd, $x = 2^n \cdot \dfrac{a}{b} \Rightarrow |x|_2 = (1/2)^n$.

$$|0|_2 = 0$$
$$|1|_2 = 1$$
$$|2|_2 = 1/2$$
$$|6|_2 = 1/2$$
$$|4|_2 = 1/4$$
$$|20|_2 = 1/4$$

$$|1/3|_2 = 1$$
$$|5/3|_2 = 1$$
$$|1/4|_2 = 4$$
$$|1/20|_2 =$$

2-adic valuation

a and b odd, $x = 2^n \cdot \dfrac{a}{b} \Rightarrow |x|_2 = (1/2)^n$.

$$|0|_2 = 0$$
$$|1|_2 = 1$$
$$|2|_2 = 1/2$$
$$|6|_2 = 1/2$$
$$|4|_2 = 1/4$$
$$|20|_2 = 1/4$$

$$|1/3|_2 = 1$$
$$|5/3|_2 = 1$$
$$|1/4|_2 = 4$$
$$|1/20|_2 = 4$$

2-adic valuation

a and b odd, $x = 2^n \cdot \dfrac{a}{b} \Rightarrow |x|_2 = (1/2)^n$.

$$|0|_2 = 0$$
$$|1|_2 = 1$$
$$|2|_2 = 1/2$$
$$|6|_2 = 1/2$$
$$|4|_2 = 1/4$$
$$|20|_2 = 1/4$$

$$|1/3|_2 = 1$$
$$|5/3|_2 = 1$$
$$|1/4|_2 = 4$$
$$|1/20|_2 = 4$$
$$|3/20|_2 =$$

2-adic valuation

a and b odd, $x = 2^n \cdot \dfrac{a}{b} \Rightarrow |x|_2 = (1/2)^n$.

$$|0|_2 = 0$$
$$|1|_2 = 1$$
$$|2|_2 = 1/2$$
$$|6|_2 = 1/2$$
$$|4|_2 = 1/4$$
$$|20|_2 = 1/4$$

$$|1/3|_2 = 1$$
$$|5/3|_2 = 1$$
$$|1/4|_2 = 4$$
$$|1/20|_2 = 4$$
$$|3/20|_2 = 4$$

2-adic valuation

a and b odd, $x = 2^n \cdot \dfrac{a}{b} \Rightarrow |x|_2 = (1/2)^n$.

$$|0|_2 = 0$$
$$|1|_2 = 1$$
$$|2|_2 = 1/2$$
$$|6|_2 = 1/2$$
$$|4|_2 = 1/4$$
$$|20|_2 = 1/4$$

$$|1/3|_2 = 1$$
$$|5/3|_2 = 1$$
$$|1/4|_2 = 4$$
$$|1/20|_2 = 4$$
$$|3/20|_2 = 4$$
$$|13/16|_2 =$$

2-adic valuation

a and b odd, $x = 2^n \cdot \dfrac{a}{b} \Rightarrow |x|_2 = (1/2)^n$.

$$|0|_2 = 0 \qquad |1/3|_2 = 1$$
$$|1|_2 = 1 \qquad |5/3|_2 = 1$$
$$|2|_2 = 1/2 \qquad |1/4|_2 = 4$$
$$|6|_2 = 1/2 \qquad |1/20|_2 = 4$$
$$|4|_2 = 1/4 \qquad |3/20|_2 = 4$$
$$|20|_2 = 1/4 \qquad |13/16|_2 = 16$$

“All triangles are isoceles.”

For any valuation,

$$|x + y|_2 \leq |x|_2 + |y|_2 \,.$$

“All triangles are isoceles.”

For any valuation,

$$|x + y|_2 \leq |x|_2 + |y|_2 \,.$$

But for a 2-adic valuation, we actually have

$$|x + y|_2 \leq \max\left\{|x|_2 \,, |y|_2\right\} \,.$$

“All triangles are isoceles.”

For any valuation,

$$|x+y|_2 \leq |x|_2 + |y|_2 \,.$$

But for a 2-adic valuation, we actually have

$$|x+y|_2 \leq \max\left\{|x|_2\,, |y|_2\right\}.$$

And if $|x|_2 \neq |y|_2$,

$$|x+y|_2 = \max\left\{|x|_2\,, |y|_2\right\}.$$

Valuations of Irrationals

We can compute $|x|_2$ when x is rational.

Valuations of Irrationals

We can compute $|x|_2$ when x is rational.
But what is $|x|_2$ when x is irrational?

Valuations of Irrationals

We can compute $|x|_2$ when x is rational.
But what is $|x|_2$ when x is irrational?

What is $\left|\sqrt{3}\right|_2$?

Valuations of Irrationals

We can compute $|x|_2$ when x is rational.
But what is $|x|_2$ when x is irrational?

What is $\left|\sqrt{3}\right|_2$?

$\left|\sqrt{3}\right|_2 \cdot \left|\sqrt{3}\right|_2$

Valuations of Irrationals

We can compute $|x|_2$ when x is rational.
But what is $|x|_2$ when x is irrational?

What is $\left|\sqrt{3}\right|_2$?

$$\left|\sqrt{3}\right|_2 \cdot \left|\sqrt{3}\right|_2 = \left|\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}\right|_2 = |3|_2$$

Valuations of Irrationals

We can compute $|x|_2$ when x is rational.
But what is $|x|_2$ when x is irrational?

What is $\left|\sqrt{3}\right|_2$?

$$\left|\sqrt{3}\right|_2 \cdot \left|\sqrt{3}\right|_2 = \left|\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}\right|_2 = |3|_2 = 1,$$

Valuations of Irrationals

We can compute $|x|_2$ when x is rational.
But what is $|x|_2$ when x is irrational?

What is $\left|\sqrt{3}\right|_2$?

$$\left|\sqrt{3}\right|_2 \cdot \left|\sqrt{3}\right|_2 = \left|\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}\right|_2 = |3|_2 = 1,$$

we must have $\left|\sqrt{3}\right|_2 = 1$.

Valuations of Irrationals

What about $\left|\sqrt{2}\right|_2$?

Valuations of Irrationals

What about $\left|\sqrt{2}\right|_2$?

$$\left|\sqrt{2}\right|_2 \cdot \left|\sqrt{2}\right|_2 = |2|_2$$

Valuations of Irrationals

What about $\left|\sqrt{2}\right|_2$?

$$\left|\sqrt{2}\right|_2 \cdot \left|\sqrt{2}\right|_2 = |2|_2 = \frac{1}{2},$$

Valuations of Irrationals

What about $\left|\sqrt{2}\right|_2$?

$$\left|\sqrt{2}\right|_2 \cdot \left|\sqrt{2}\right|_2 = |2|_2 = \frac{1}{2},$$

and so

$$\left|\sqrt{2}\right|_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Valuations of Irrationals

What about other real numbers?

Valuations of Irrationals

What about other real numbers?

What about $|\pi|_2$?

Valuations of Irrationals

What about other real numbers?
What about $|\pi|_2$?

The **axiom of choice** implies that there *exists* a 2-adic valuation defined for all real numbers

Valuations of Irrationals

What about other real numbers?
What about $|\pi|_2$?

The **axiom of choice** implies that there *exists* a 2-adic valuation defined for all real numbers—but we can't write an example down.

2-adic valuation: Review

Write $|x|_2$ for the 2-adic valuation of x.

2-adic valuation: Review

Write $|x|_2$ for the 2-adic valuation of x.

$|x|_2$ measures how many times 2 divides x.

2-adic valuation: Review

Write $|x|_2$ for the 2-adic valuation of x.

$|x|_2$ measures how many times 2 divides x.
$|x|_2$ measures x's size from 2's perspective.

2-adic valuation: Review

Write $|x|_2$ for the 2-adic valuation of x.

$|x|_2$ measures how many times 2 divides x.
$|x|_2$ measures x's size from 2's perspective.

Key Observation

If n is an even integer, $|n|_2 < 1$.
If n is an odd integer, $|n|_2 \geq 1$.

The Proof

Two ingredients:

Sperner's Lemma

and a

2-adic valuation.

The Proof

Two ingredients:

Sperner's Lemma

and a

2-adic valuation.

The Proof

Two ingredients:

Sperner's Lemma

and a

2-adic valuation.

The Original Question

We want to show that a square cannot be cut into an odd-number of equal-area triangles.

The Original Question

We want to show that a square cannot be cut into an odd-number of equal-area triangles.

So far, we have

- Sperner's lemma, and
- a 2-adic valuation.

How can we use these tools?

The Original Question

We want to show that a square cannot be cut into an odd-number of equal-area triangles.

So far, we have

- Sperner's lemma, and
- a 2-adic valuation.

How can we use these tools?

Paint by number. Use the 2-adic valuation to decide what color to give to the vertices.

The Proof

Given: a **triangulation** of a square into n equal-area triangles.

The Proof

Given: a **triangulation** of a square into n equal-area triangles.

Color a vertex at (x, y) with

- **A** if $|x|_2 < 1$ and $|y|_2 < 1$.
- **B** if $|x|_2 \geq 1$ and $|x|_2 \geq |y|_2$.
- **C** if $|y|_2 \geq 1$ and $|x|_2 < |y|_2$.

The Proof

Given: a **triangulation** of a square into n equal-area triangles.

Color a vertex at (x, y) with

A if $|x|_2 < 1$ and $|y|_2 < 1$.

B if $|x|_2 \geq 1$ and $|x|_2 \geq |y|_2$.

C if $|y|_2 \geq 1$ and $|x|_2 < |y|_2$.

We want to **prove** that n is even.

Use Sperner's Lemma

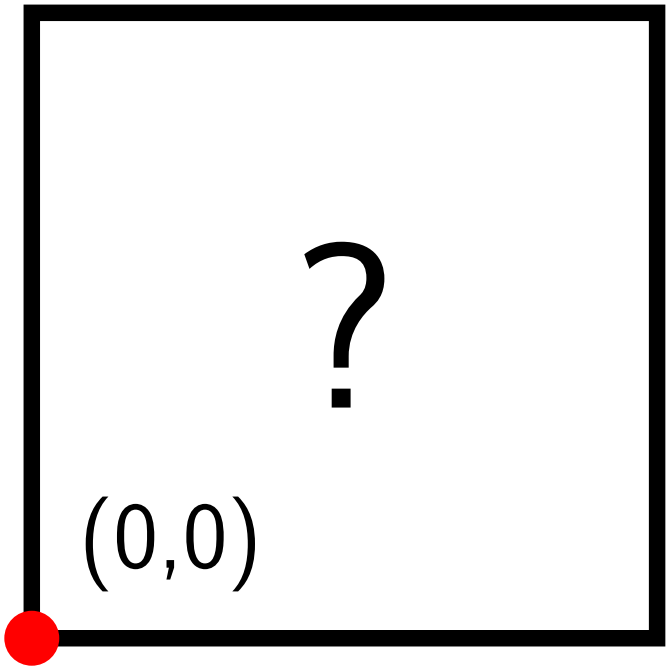
?

A: $|x|_2 < 1$ and $|y|_2 < 1$.

B: $|x|_2 \geq 1$ and $|x|_2 \geq |y|_2$.

C: $|y|_2 \geq 1$ and $|x|_2 < |y|_2$.

Use Sperner's Lemma

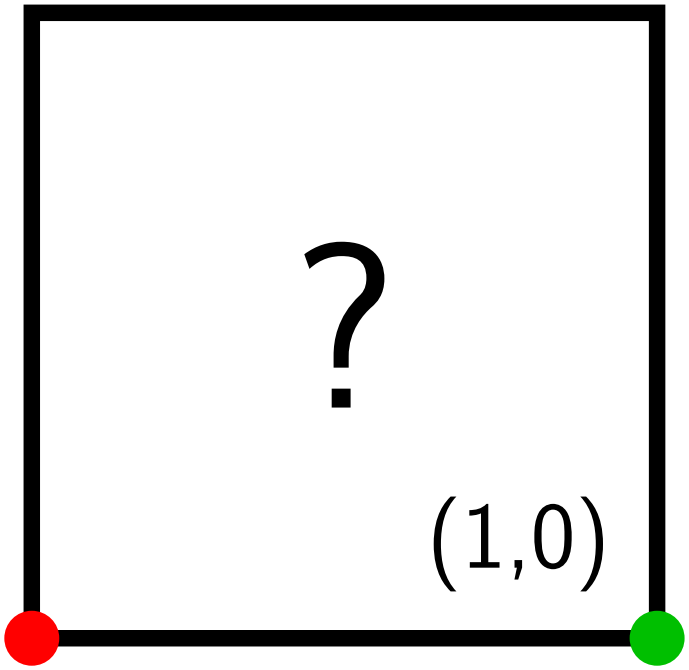


A: $|x|_2 < 1$ and $|y|_2 < 1$.

B: $|x|_2 \geq 1$ and $|x|_2 \geq |y|_2$.

C: $|y|_2 \geq 1$ and $|x|_2 < |y|_2$.

Use Sperner's Lemma

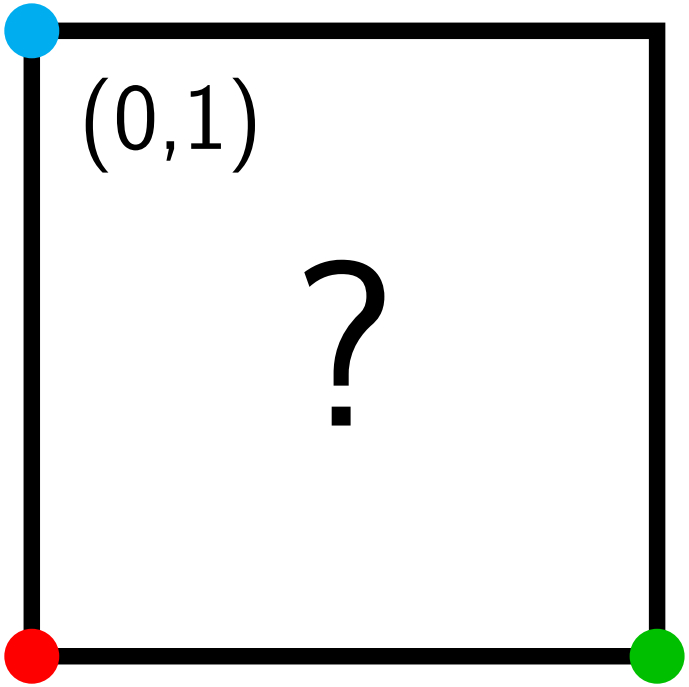


A: $|x|_2 < 1$ and $|y|_2 < 1$.

B: $|x|_2 \geq 1$ and $|x|_2 \geq |y|_2$.

C: $|y|_2 \geq 1$ and $|x|_2 < |y|_2$.

Use Sperner's Lemma

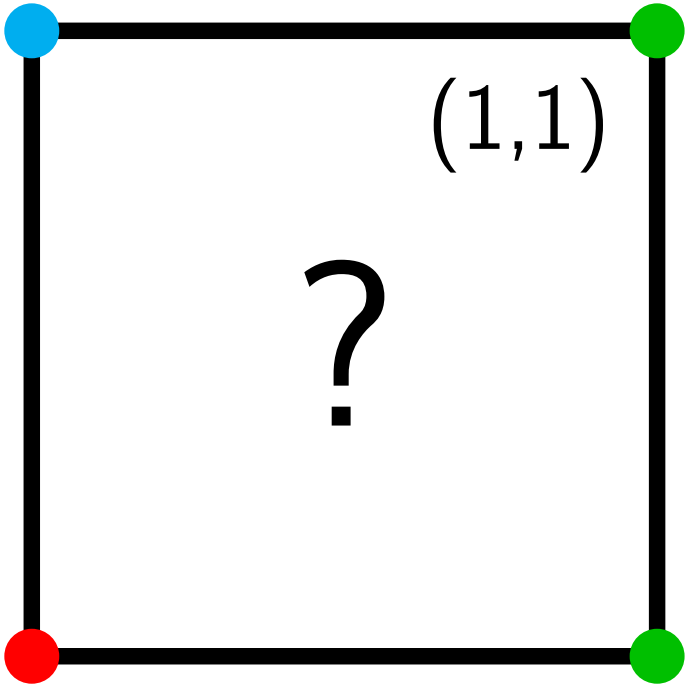


A: $|x|_2 < 1$ and $|y|_2 < 1$.

B: $|x|_2 \geq 1$ and $|x|_2 \geq |y|_2$.

C: $|y|_2 \geq 1$ and $|x|_2 < |y|_2$.

Use Sperner's Lemma

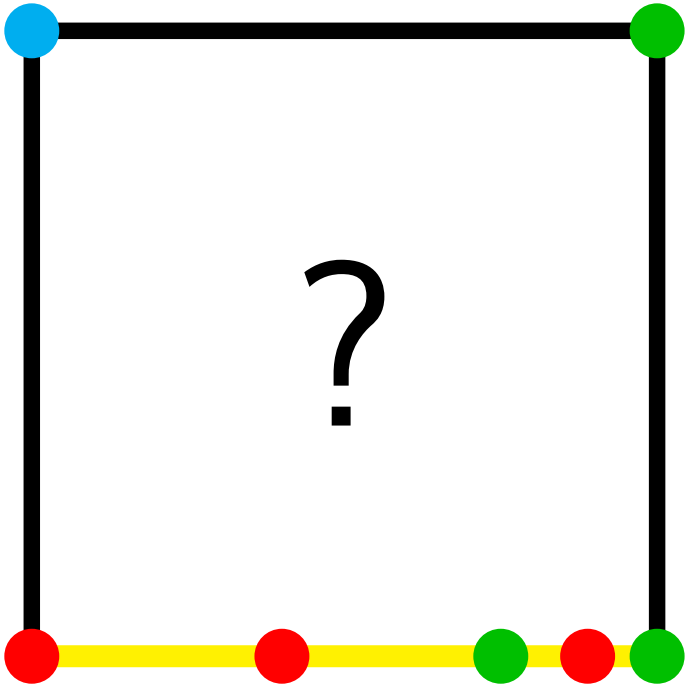


A: $|x|_2 < 1$ and $|y|_2 < 1$.

B: $|x|_2 \geq 1$ and $|x|_2 \geq |y|_2$.

C: $|y|_2 \geq 1$ and $|x|_2 < |y|_2$.

Use Sperner's Lemma



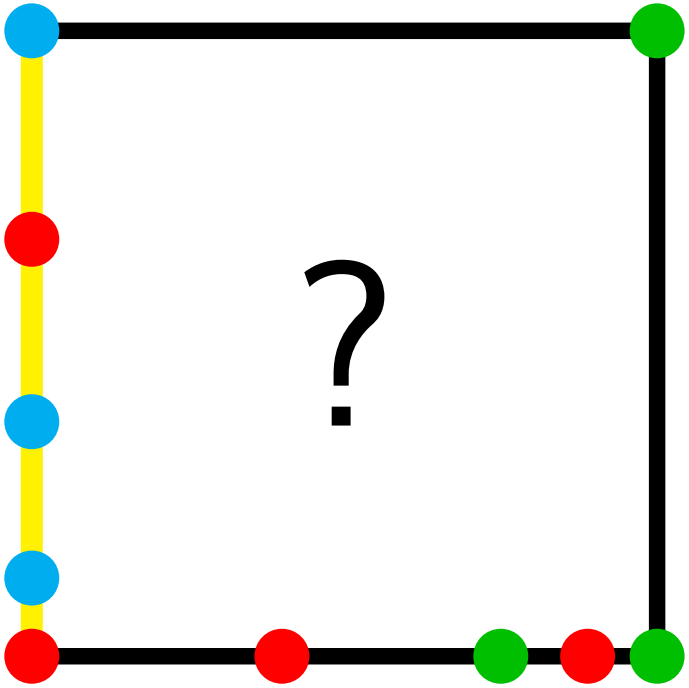
Bottom: **A** or **B**

A: $|x|_2 < 1$ and $|y|_2 < 1$.

B: $|x|_2 \geq 1$ and $|x|_2 \geq |y|_2$.

C: $|y|_2 \geq 1$ and $|x|_2 < |y|_2$.

Use Sperner's Lemma



A: $|x|_2 < 1$ and $|y|_2 < 1$.

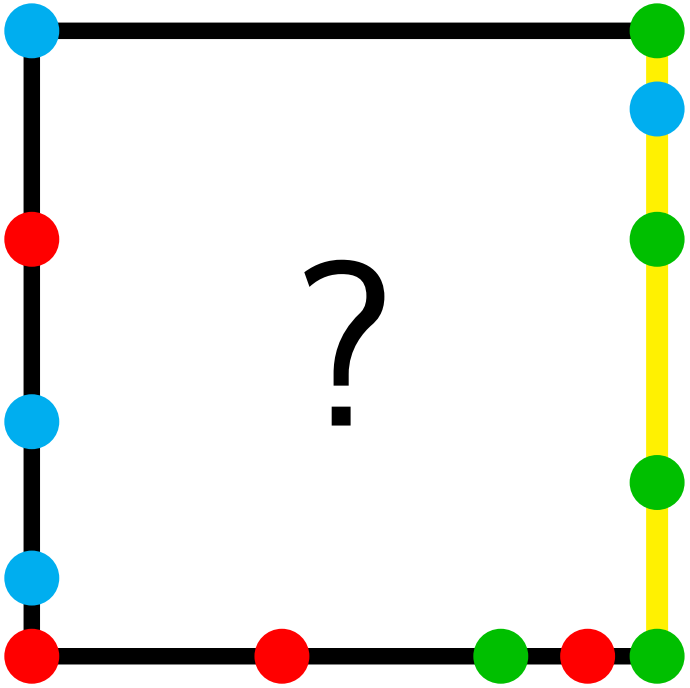
B: $|x|_2 \geq 1$ and $|x|_2 \geq |y|_2$.

C: $|y|_2 \geq 1$ and $|x|_2 < |y|_2$.

Bottom: **A** or **B**

Left: **A** or **C**

Use Sperner's Lemma



A: $|x|_2 < 1$ and $|y|_2 < 1$.

B: $|x|_2 \geq 1$ and $|x|_2 \geq |y|_2$.

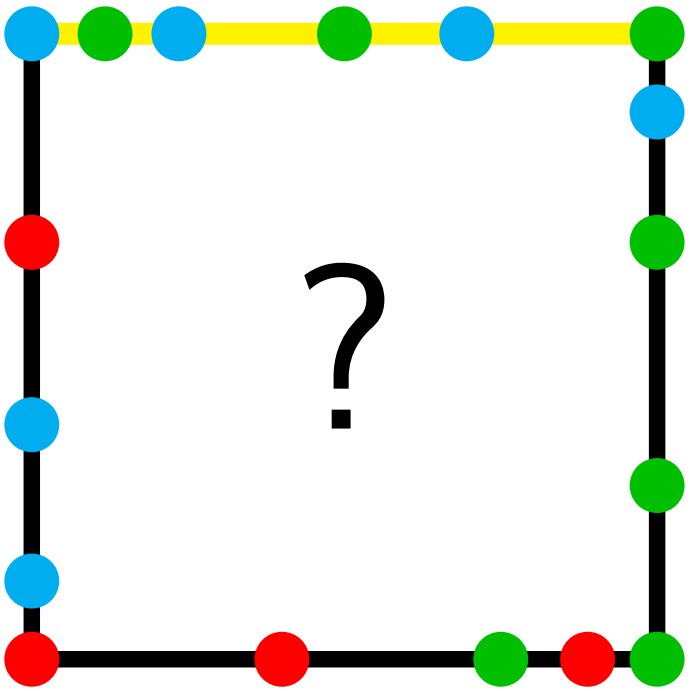
C: $|y|_2 \geq 1$ and $|x|_2 < |y|_2$.

Bottom: **A** or **B**

Left: **A** or **C**

Right: **B** or **C**

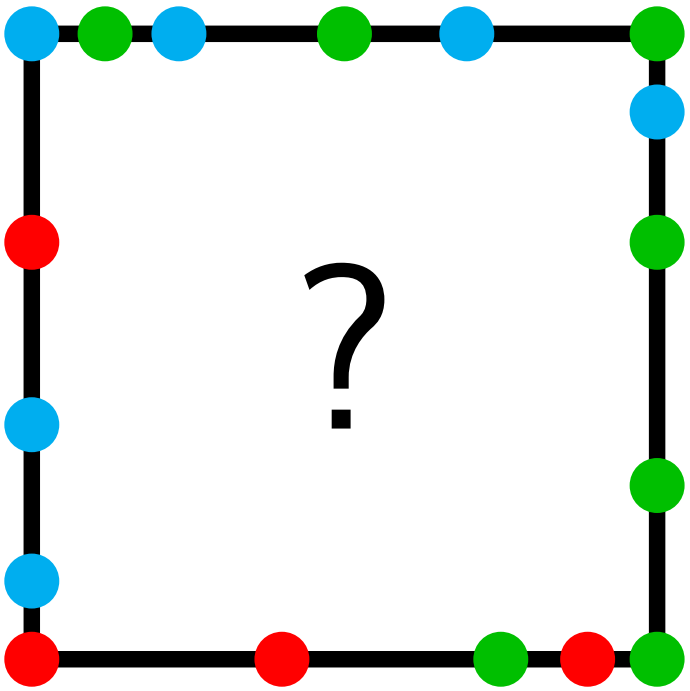
Use Sperner's Lemma



A: $|x|_2 < 1$ and $|y|_2 < 1$.
B: $|x|_2 \geq 1$ and $|x|_2 \geq |y|_2$.
C: $|y|_2 \geq 1$ and $|x|_2 < |y|_2$.

Bottom: **A** or **B**
Left: **A** or **C**
Right: **B** or **C**
Top: **B** or **C**

Use Sperner's Lemma

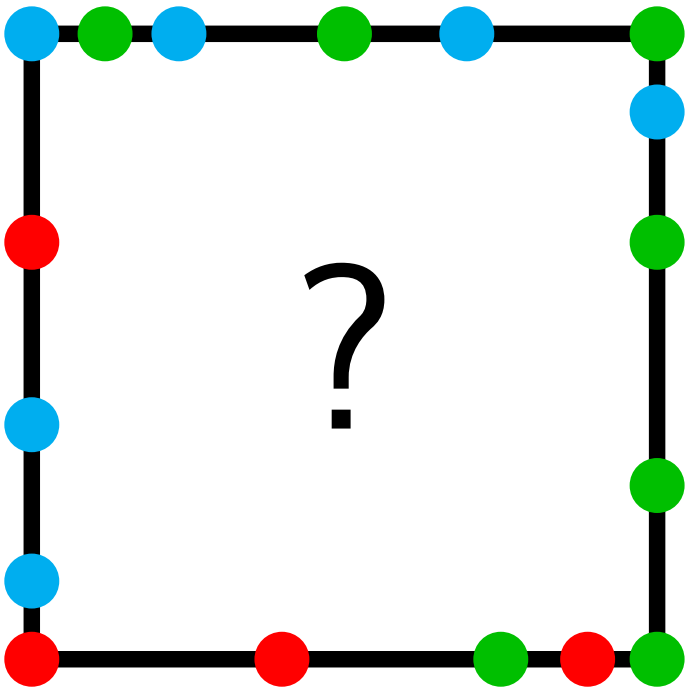


A: $|x|_2 < 1$ and $|y|_2 < 1$.
B: $|x|_2 \geq 1$ and $|x|_2 \geq |y|_2$.
C: $|y|_2 \geq 1$ and $|x|_2 < |y|_2$.

Bottom:	**A** or **B**	
Left:	**A** or **C**	$\Rightarrow$
Right:	**B** or **C**	
Top:	**B** or **C**	

Odd number of **AB** edges on perimeter

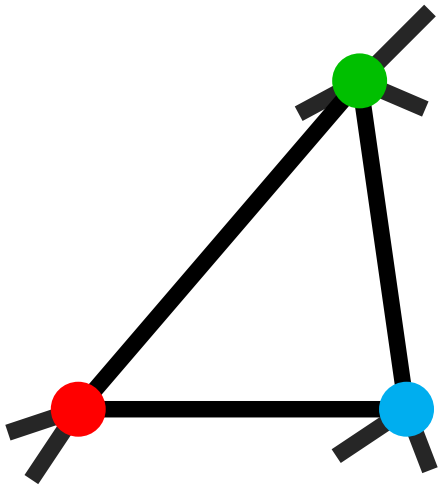
Use Sperner's Lemma



A: $|x|_2 < 1$ and $|y|_2 < 1$.
B: $|x|_2 \geq 1$ and $|x|_2 \geq |y|_2$.
C: $|y|_2 \geq 1$ and $|x|_2 < |y|_2$.

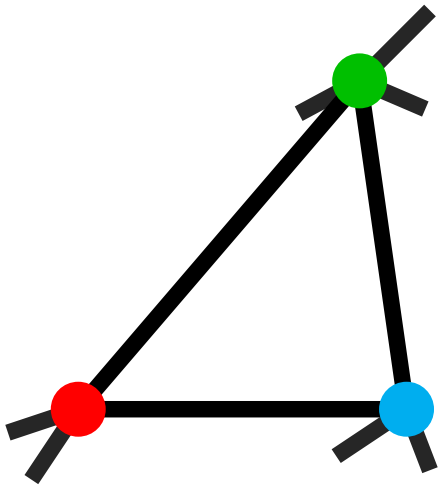
Bottom:	**A** or **B**	Odd number of
Left:	**A** or **C**	**AB** edges on
Right:	**B** or **C**	$\Rightarrow$ perimeter; get
Top:	**B** or **C**	**ABC** triangle

What we know so far



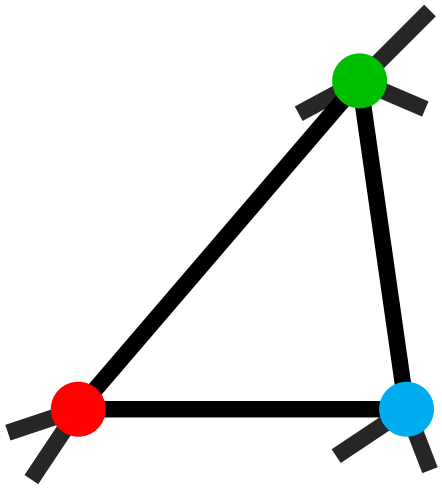
In any triangulation of the square into n triangles, there is an **ABC** triangle.

What we know so far



In any triangulation of the square into n equal-area triangles, there is an **ABC** triangle.

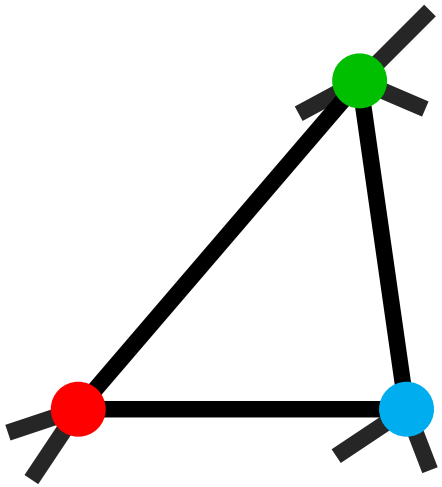
What we know so far



In any triangulation of the square into n equal-area triangles, there is an **ABC** triangle.

Area of **ABC** triangle is $\frac{1}{n}$.

What we know so far

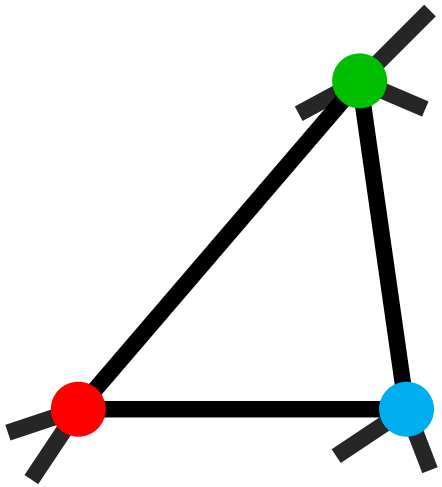


In any triangulation of the square into n equal-area triangles, there is an **ABC** triangle.

Area of **ABC** triangle is $\frac{1}{n}$.

Key idea: the area of a triangle is related to the color of its vertices.

What we know so far



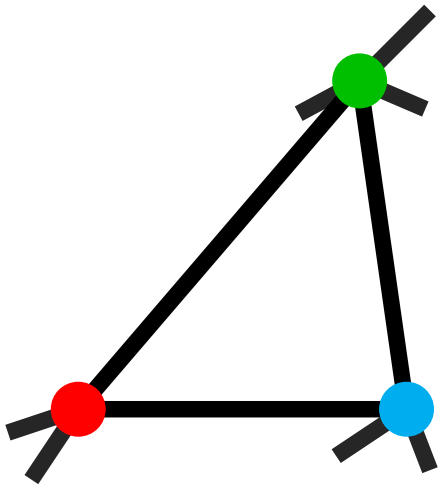
In any triangulation of the square into n equal-area triangles, there is an **ABC** triangle.

Area of **ABC** triangle is $\frac{1}{n}$.

Key idea: the area of a triangle is related to the color of its vertices.

In fact, if r is the area of an **ABC** triangle, then $|r|_2 \geq 2$.

What we know so far



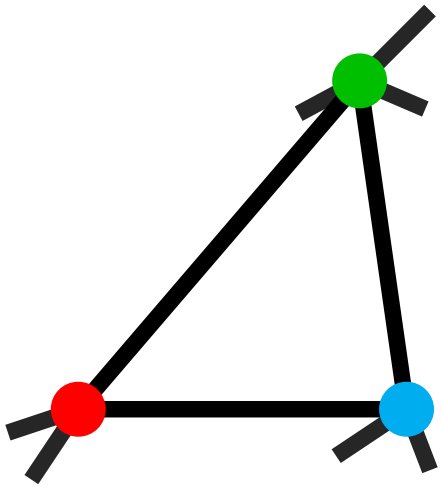
In any triangulation of the square into n equal-area triangles, there is an **ABC** triangle.

Area of **ABC** triangle is $\frac{1}{n}$.

Key idea: the area of a triangle is related to the color of its vertices.

In fact, if r is the area of an **ABC** triangle, then $|r|_2 \geq 2$. So $|1/n|_2 \geq 2$.

What we know so far



In any triangulation of the square into n equal-area triangles, there is an **ABC** triangle.

Area of **ABC** triangle is $\frac{1}{n}$.

Key idea: the area of a triangle is related to the color of its vertices.

In fact, if r is the area of an **ABC** triangle, then $|r|_2 \geq 2$. So $|1/n|_2 \geq 2$. So n is even.

Area and vertex color

$r =$ area of **ABC** triangle with vertices

$(\ 0,\ 0\ )$ colored **A**

$(x_b,\ y_b)$ colored **B** so $|x_b|_2 \geq 1$ and

$|x_b|_2 \geq |y_b|_2$

$(x_c,\ y_c)$ colored **C** so $|y_c|_2 \geq 1$ and

$|y_c|_2 > |x_c|_2$

Area and vertex color

$r =$ area of **ABC** triangle with vertices

$(\ 0,\ 0\ )$ colored **A**

$(x_b,\ y_b)$ colored **B** so $|x_b|_2 \geq 1$ and

$|x_b|_2 \geq |y_b|_2$

$(x_c,\ y_c)$ colored **C** so $|y_c|_2 \geq 1$ and

$|y_c|_2 > |x_c|_2$

$$r = \frac{1}{2} \cdot (x_b\, y_c - x_c\, y_b)$$

Area and vertex color

$r =$ area of **ABC** triangle with vertices

$(\ 0,\ 0\ )$ colored **A**

$(x_b,\ y_b)$ colored **B** so $|x_b|_2 \geq 1$ and

$|x_b|_2 \geq |y_b|_2$

$(x_c,\ y_c)$ colored **C** so $|y_c|_2 \geq 1$ and

$|y_c|_2 > |x_c|_2$

$$|r|_2 = \left|\frac{1}{2}\right|_2 \cdot |x_b\, y_c - x_c\, y_b|_2$$

Area and vertex color

$r =$ area of **ABC** triangle with vertices

$(\ 0,\ 0\ )$ colored **A**

$(x_b,\ y_b)$ colored **B** so $|x_b|_2 \geq 1$ and

$|x_b|_2 \geq |y_b|_2$

$(x_c,\ y_c)$ colored **C** so $|y_c|_2 \geq 1$ and

$|y_c|_2 > |x_c|_2$

$$|r|_2 = \quad 2 \quad \cdot |x_b\, y_c - x_c\, y_b|_2$$

Area and vertex color

$r =$ area of **ABC** triangle with vertices

$(\ 0,\ 0\ )$ colored **A**

$(x_b,\ y_b)$ colored **B** so $|x_b|_2 \geq 1$ and

$|x_b|_2 \geq |y_b|_2$

$(x_c,\ y_c)$ colored **C** so $|y_c|_2 \geq 1$ and

$|y_c|_2 > |x_c|_2$

$$|r|_2 = \quad 2 \quad \cdot |x_b\, y_c - x_c\, y_b|_2$$

$$= 2 \cdot \max\left\{|x_b y_c|_2\,,\, |x_c y_b|_2\right\}$$

Area and vertex color

$r =$ area of **ABC** triangle with vertices

$(\ 0,\ 0\ )$ colored **A**

$(x_b,\ y_b)$ colored **B** so $|x_b|_2 \geq 1$ and

$|x_b|_2 \geq |y_b|_2$

$(x_c,\ y_c)$ colored **C** so $|y_c|_2 \geq 1$ and

$|y_c|_2 > |x_c|_2$

$$|r|_2 = \quad 2 \quad \cdot |x_b\, y_c - x_c\, y_b|_2$$

$$= 2 \cdot \max\left\{|x_b y_c|_2\,,\, |x_c y_b|_2\right\}$$

$$= 2 \cdot \ |x_b y_c|_2$$

Area and vertex color

$r =$ area of **ABC** triangle with vertices

$(\ 0,\ 0\ )$ colored **A**

$(x_b,\ y_b)$ colored **B** so $|x_b|_2 \geq 1$ and

$|x_b|_2 \geq |y_b|_2$

$(x_c,\ y_c)$ colored **C** so $|y_c|_2 \geq 1$ and

$|y_c|_2 > |x_c|_2$

$$|r|_2 = \quad 2 \quad \cdot |x_b\, y_c - x_c\, y_b|_2$$

$$= 2 \cdot \max\left\{|x_b y_c|_2\,,\, |x_c y_b|_2\right\}$$

$$= 2 \cdot \ |x_b|_2 \cdot \ |y_c|_2$$

Area and vertex color

$r =$ area of **ABC** triangle with vertices

$(\ 0,\ 0\ )$ colored **A**

$(x_b,\ y_b)$ colored **B** so $|x_b|_2 \geq 1$ and

$|x_b|_2 \geq |y_b|_2$

$(x_c,\ y_c)$ colored **C** so $|y_c|_2 \geq 1$ and

$|y_c|_2 > |x_c|_2$

$$|r|_2 = \quad 2 \quad \cdot |x_b\, y_c - x_c\, y_b|_2$$

$$= 2 \cdot \max\left\{|x_b y_c|_2\,, |x_c y_b|_2\right\}$$

$$= 2 \cdot \ |x_b|_2 \cdot |y_c|_2 \geq 2.$$

Area and vertex color

Let r be the area of an **ABC** triangle, with vertices

$$
\begin{aligned}
&(x_a \quad , y_a \quad) \text{ colored } \mathbf{A} \\
&(x_b \quad , y_b \quad) \text{ colored } \mathbf{B} \\
&(x_c \quad , y_c \quad) \text{ colored } \mathbf{C}
\end{aligned}
$$

Area and vertex color

Let r be the area of an **ABC** triangle, with vertices translated by $(-x_a, -y_a)$

$(x_a - x_a, y_a - y_a)$ colored **A**?

$(x_b - x_a, y_b - y_a)$ colored **B**?

$(x_c - x_a, y_c - y_a)$ colored **C**?

Area and vertex color

Let r be the area of an **ABC** triangle, with vertices translated by $(-x_a, -y_a)$

$$(x_a - x_a, y_a - y_a) \text{ colored } \mathbf{A}$$
$$(x_b - x_a, y_b - y_a) \text{ colored } \mathbf{B}$$
$$(x_c - x_a, y_c - y_a) \text{ colored } \mathbf{C}$$

Translating by a point colored **A** preserves the colors.

Area and vertex color

Let r be the area of an **ABC** triangle, with vertices translated by $(-x_a, -y_a)$

$$(x_a - x_a, y_a - y_a) \text{ colored } \mathbf{A}$$
$$(x_b - x_a, y_b - y_a) \text{ colored } \mathbf{B}$$
$$(x_c - x_a, y_c - y_a) \text{ colored } \mathbf{C}$$

Translating by a point colored **A** preserves the colors.

The previous calculation proves $|r|_2 \geq 2$.

Area and vertex color

Let n be the number of equal-area triangles, each having area $r = 1/n$.

Area and vertex color

Let n be the number of equal-area triangles, each having area $r = 1/n$.

Then $|n \cdot r|_2 = |1|_2 = 1$.

Area and vertex color

Let n be the number of equal-area triangles, each having area $r = 1/n$.

Then $|n \cdot r|_2 = |1|_2 = 1$.

But $|r|_2 \geq 2$, so $|n|_2 \leq 1/2$, so n is even.

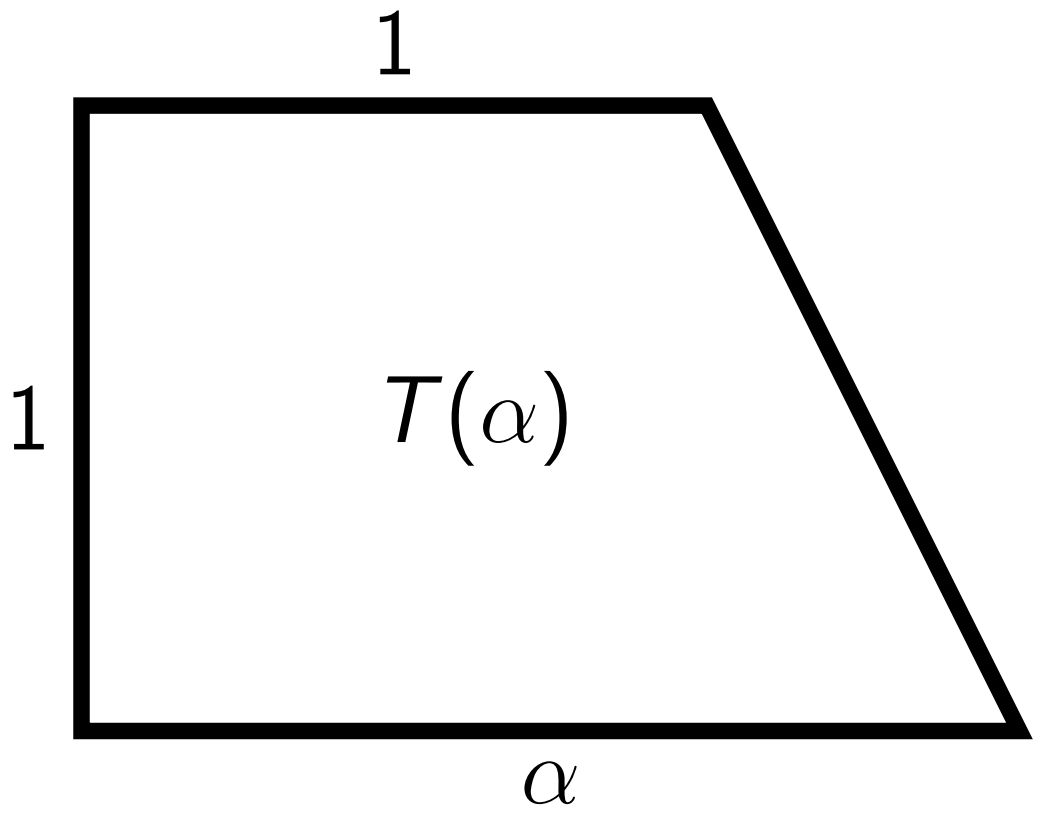
Area and vertex color

Let n be the number of equal-area triangles, each having area $r = 1/n$.

Then $|n \cdot r|_2 = |1|_2 = 1$.

But $|r|_2 \geq 2$, so $|n|_2 \leq 1/2$, so n is even. $\square$

Other polygons



n is in the **spectrum** of a polygon P
if P can be divided in n equal-area triangles.

Bibliography

Where can I learn more?

Bibliography

Where can I learn more?

- Paul Monsky. "On dividing a square into triangles." *Amer. Math. Monthly* **77** 1970 161–164.

Bibliography

Where can I learn more?

- Paul Monsky. "On dividing a square into triangles." *Amer. Math. Monthly* **77** 1970 161–164.
- Sherman Stein and Szabó Sándor. *Algebra and tiling. Homomorphisms in the service of geometry.* Carus Mathematical Monographs **25**. MAA. 1994.

Thank You!