Fête de la Science 2010 – Rallye Mathématique

Sudoku Bleu – réponses

1) Convenons de dire que les deux premières lignes (ou les deux dernières) forment une *bande* et que les deux premières colonnes (ou les deux dernières) forment une *pile*. Voici 8 familles de symétries « élémentaires » que nous pouvons utiliser (on obtient d'autres symétries en combinant celles-ci) :

1- permutation des bandes,
2- permutation des piles,
3- permutation des lignes dans une bande,
4- permutation des colonnes dans une pile,
5- renumérotation des symboles 1,2,3,4,
6- réflexion autour d'un axe de symétrie horizontal ou vertical,
7- réflexion autour de l'une des deux diagonales,
8- rotation.

2) Voici la grille remplie :

1	3	2	4
4	2	3	1
2	4	1	3
3	1	4	2

3) Oui, sans cette règle, on peut aussi proposer :

1	3	2	4
4	1	3	2
2	4	1	3
3	2	4	1

Donc cette règle est importante !

4) On peut en fait montrer qu'à symétrie près, il y a exactement 2 grilles distinctes. Voyons d'abord comment on peut faire pour montrer qu'il y a moins de 2 grilles distinctes (et donc moins de 3 !). On verra ensuite comment montrer qu'il y a 2 grilles distinctes qui ne peuvent pas se déduire l'une de l'autre par une symétrie.

Partons d'une grille quelconque. En utilisant la symétrie no. 5, on peut renuméroter les quatre chiffres du bloc en haut à gauche de sorte à obtenir :

Grille 1

1	2	∗	∗
3	4	∗	∗
∗	∗	∗	∗
∗	∗	∗	∗

Ensuite, pour compléter la première ligne, il y a deux possibilités :

Grille 2

1	2	3	4
3	4	∗	∗
∗	∗	∗	∗
∗	∗	∗	∗

ou

Grille 3

1	2	4	3
3	4	∗	∗
∗	∗	∗	∗
∗	∗	∗	∗

On voit que l'échange des deux dernières colonnes (symétrie no. 4) ramène le deuxième cas au premier, donc on peut supposer qu'on est dans le premier cas. De même, pour compléter la première colonne, quitte à échanger les deux dernières lignes on se retrouve avec la grille suivante :

Grille 4

1	2	3	4
3	4	∗	∗
2	∗	∗	∗
4	∗	∗	∗

Passons à la troisième case de la deuxième ligne. On peut y mettre un 1 ou un 2 et *nous allons montrer qu'on peut se ramener au cas où ce chiffre est un 1.* En effet, si on y met un 2, on peut compléter quelques cases supplémentaires, compte tenu des contraintes du jeu :

Grille 5

1	2	3	4
3	4	2	∗
2	∗	∗	∗
4	∗	∗	∗

→

Grille 6

1	2	3	4
3	4	2	∗
2	∗	4	∗
4	∗	∗	∗

↓

Grille 8

1	2	3	4
3	4	2	∗
2	1	4	∗
4	∗	1	∗

←

Grille 7

1	2	3	4
3	4	2	∗
2	∗	4	∗
4	∗	1	∗

Alors, appliquons la réflexion par rapport à la diagonale nord-ouest / sud-est (no. 7) :

Grille 9

1	3	2	4
2	4	1	$*$
3	2	4	1
4	$*$	$*$	$*$

puis renumérotons 2 en 3 et 3 en 2 (sans changer 1 et 4) :

Grille 9

1	2	3	4
3	4	1	$*$
2	3	4	1
4	$*$	$*$	$*$

On voit qu'on se retrouve au stade de la grille 4 avec un 1 dans la troisième case de la deuxième ligne. Rappelons-nous qu'on avait à choisir entre un 1 et un 2 et qu'on voulait montrer qu'on peut se ramener à un 1 (phrase en italique plus haut) ; c'est fait. Finalement, en utilisant des symétries, on a ramené notre début de grille à :

Grille 10

1	2	3	4
3	4	1	$*$
2	$*$	$*$	$*$
4	$*$	$*$	$*$

Ici, on peut compléter un peu :

Grille 11

1	2	3	4
3	4	1	2
2	$*$	4	$*$
4	$*$	2	$*$

On trouve maintenant deux possibilités :

Grille 12

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

ou

Grille 13

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3

Ces deux grilles ne se déduisent pas l'une de l'autre par une symétrie. Pour le démontrer, analysons un peu plus en détail nos symétries. Donnons-leur des symboles :

$\rightrightarrows$	échange des deux bandes
$\rightrightarrows 1$	échange des lignes dans la bande 1
$\rightrightarrows 2$	échange des lignes dans la bande 2
$\downdownarrows$	échange des piles
$\downdownarrows 1$	échange des colonnes dans la pile 1
$\downdownarrows 2$	échange des lignes dans la pile 2
	renumérotation des symboles 1,2,3,4
$\diagdown$	réflexion autour de la diagonale NO-SE
$\diagup$	réflexion autour de la diagonale NE-SO
$—$	réflexion autour de l'axe de symétrie horizontal
$\vert$	autour de l'axe de symétrie vertical
$\circlearrowleft$	rotation 1/4 tour dans le sens indiqué

Bien sûr, les autres rotations (1/2 tour, 3/4 tour) s'obtiennent en itérant celle du tableau. Mais il est facile de voir que certaines de ces symétries sont superflues car elles peuvent être décomposées à l'aide des autres. Par exemple :

$$\rightrightarrows 1 \quad \text{s'obtient par la séquence} \quad \rightrightarrows \quad \rightrightarrows 2 \quad \rightrightarrows$$

$$\downdownarrows 1 \quad \text{s'obtient par la séquence} \quad \downdownarrows \quad \downdownarrows 2 \quad \downdownarrows$$

$$— \quad \text{s'obtient par la séquence} \quad \rightrightarrows \quad \rightrightarrows 1 \quad \rightrightarrows 2$$

$$\vert \quad \text{s'obtient par la séquence} \quad \downdownarrows \quad \downdownarrows 1 \quad \downdownarrows 2$$

Un peu plus compliqué :

$$\diagup \quad \text{s'obtient par la séquence} \quad — \quad \vert \quad \diagdown$$

$$\circlearrowleft \quad \text{s'obtient par la séquence} \quad \rightrightarrows \quad \diagup \quad \downdownarrows 1 \quad \downdownarrows 2$$

Finalement, il nous suffit de considérer les symétries suivantes

$$\rightrightarrows \ , \ \rightrightarrows 2 \ , \ \downdownarrows \ , \ \downdownarrows 2 \ , \ \diagdown \text{ et } \text{ renumérotation}$$

pour engendrer toutes les symétries. Ici, il devient difficile de ne pas formaliser un peu les choses. Notons X l'ensemble des grilles de Sudoku et G l'ensemble des symétries. En mathématiques, un tel ensemble de symétries est appelé un *groupe*. Notons H le sous-groupe engendré par les transformations

$$\text{renumérotation} \ , \ \rightrightarrows 2 \ , \ \downdownarrows 2 \ , \ \diagdown .$$

Si on veut, on peut même observer que deux parmi les trois derniers générateurs suffisent, car

$$\rightrightarrows 2 \quad \text{s'obtient par la séquence} \quad \diagdown \quad \downdownarrows 2 \quad \diagdown$$

mais il est commode de conserver $\circlearrowright 2$ dans notre boîte à outils. Le raisonnement que nous avons fait au début a montré que l'ensemble des grilles de Sudoku considérées aux symétries près *par des éléments de H* contient exactement deux éléments, les grilles 12 et 13. La question initiale étant de compter les grilles aux symétries près *par des éléments de G*, il reste à voir comment les deux symétries $\circlearrowright$ et $\rightleftarrows$ agissent sur les deux grilles 12 et 13. Or on constate qu'elles n'ont pas d'action, c'est-à-dire que l'image de 12 est 12, et l'image de 13 est 13. Vérifions par exemple en détail le cas de $\circlearrowright$: pour cela on applique $\circlearrowright$ puis des symétries de H par le procédé décrit au début pour revenir sur l'une des grilles 12 ou 13.

Pour la grille 12, après $\circlearrowright$ il n'y a qu'à appliquer la renumérotation qui échange 1 et 2, d'une part, et 3 et 4, d'autre part :

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

$\circlearrowright$

2	1	4	3
4	3	2	1
1	2	3	4
3	4	1	2

(12)(34)

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

et on retombe en effet sur la grille 12 de laquelle on est parti. Pour la grille 13, après $\circlearrowright$ il faut renuméroter 1 en 4, 4 en 3, 3 en 2, 2 en 1 puis échanger les deux dernières lignes :

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3

$\circlearrowright$

2	3	4	1
4	1	2	3
1	2	3	4
3	4	1	2

(1432)

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

$\circlearrowright 2$

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3

et on retombe sur la grille 13. La conclusion est que les grilles 12 et 13 ne sont pas échangées par l'action résiduelle de $\circlearrowright$ et $\rightleftarrows$. En termes mathématiques, la relation d'équivalence induite par G sur X/H est triviale, si bien que

$$X/H \simeq X/G = \{ \text{ les grilles 12 et 13 } \}.$$

5) Il faut être astucieux pour trouver les bons endroits où regarder. Par exemple, les endroits (lignes, colonnes, blocs,) où se trouvent déjà beaucoup de cases remplies. Voici quelques indications pour commencer :

- dans le bloc situé bande 1, pile 3, où peut se trouver le 9 ?
- dans le même bloc, où peut ensuite se trouver le 5 ?
- dans la colonne 4, où peut ensuite se trouver le 7 ?

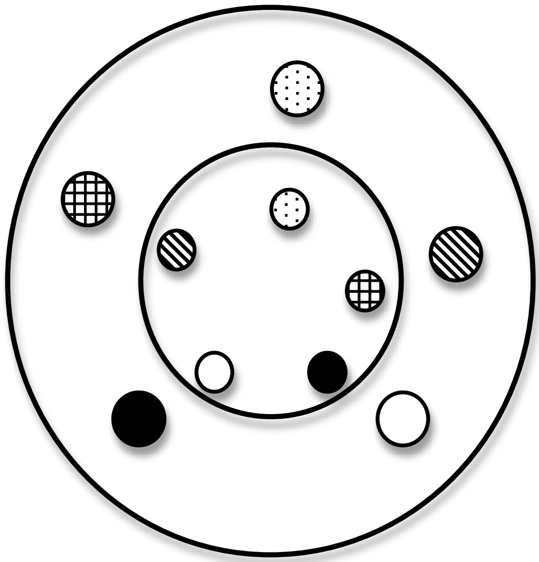
Etc.

Voici la grille remplie :

6	9	7	4	5	3	2	1	8
8	2	4	6	1	9	7	5	3
3	5	1	2	8	7	6	9	4
7	3	5	8	6	1	9	4	2
9	4	8	7	3	2	1	6	5
1	6	2	5	9	4	3	8	7
5	1	9	3	7	8	4	2	6
4	7	6	9	2	5	8	3	1
2	8	3	1	4	6	5	7	9

Table tournante – éléments de correction

1) Pour le cas 5 pions, on peut exhiber une solution :



2) Pour le cas 4 pions, c'est impossible. Pour s'en convaincre, on peut faire une liste exhaustive des cas possibles.

3) Généralisation
- Possible lorsque le nombre de pions est impair.
- Impossible lorsque le nombre de pions est pair.

4) Preuves
On va essentiellement s'intéresser ici à l'explicitation de méthodes de construction générales :

- Considérer la position relative des pions les uns par rapport aux autres permet l'énoncé d'une méthode de construction. Par exemple, la stratégie « **parité** » : on place les couleurs « paires » par ordre croissant, puis les « impaires » (pour le problème (5, 5), cela donne : « 0 1 2 3 4 » pour le forain et « 0 2 4 1 3 » pour le joueur).
- Stratégie « **décalage** » : un décalage est le nombre des crans que doit parcourir un pion intérieur avant d'être en face à face. On place un face à face (le 0), puis, le 1 est décalé de 1, le 2 est décalé de 2 etc. (et cela ne fonctionne pas pour les nombres pairs.)
- Stratégie « **symétrie** » (pour les cas impairs) : on place un face à face et on « inverse » (par symétrie) les restants.
- Stratégie par « **forçage** ».

Et aussi stratégie par « **exhaustivité** » des cas (pour les cas pairs notamment).

5) Pour le cas (n, *2*) où n est le nombre de couleurs sur le grand disque et *2* le nombre de couleurs sur le petit disque. Il s'agit de disposer les couleurs internes de telle sorte qu'à chaque cran du petit disque il n'y ait qu'une couleur en face-à-face.
Pour simplifier, on peut coder les différentes couleurs par des entiers allant de 0 à n-1.
On peut aussi regarder le cas (4, 2) afin de se faire une idée.
Des conjectures possibles :

- (n, 2) admet une solution si et seulement si n est non premier ;
- le décalage entre les 2 couleurs ne doit pas être premier avec n.

Choix des couleurs

Normalement, la première étape consiste à choisir les deux couleurs centrales. En fait, les deux couleurs choisies **ne doivent pas être consécutives**, car sinon, quel que soit n, il y aura soit aucun face à face, soit deux simultanément.

Premières conjectures

Une analyse par cas permet de montrer qu'il n'y a pas de solution pour $n = 3, 5$ et pour les courageux $n = 7$. Par ailleurs, on exhibe facilement des solutions pour n pair.

Cela peut conduire à la conjecture affirmant qu'**il n'y a de solutions pour (n, 2) que si n est pair**. Toutefois, si on étudie le cas $n = 9$, après quelques essais, cela aboutira à une solution. On aura ainsi mis en évidence un contre-exemple à cette conjecture et on sera amené à l'énoncé d'une nouvelle conjecture : « **(n, 2) admet une solution ssi n est non premier** ».

Not Knot : correction

1. Les deux premiers diagrammes représentent le même noeud : le *noeud de trèfle*, voir figure 1.

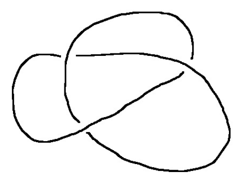


Figure 1: Noeud de trèfle

Le dernier diagramme représente le “noeud trivial” autrement dit le “noeud” qui n’est pas noué.

2. Les trois diagrammes représentent le même noeud appelé *noeud de huit*.

3. Un noeud dont le diagramme ne comporte que de deux croisements n’est pas noué.

4. À l’aide du mouvement – appelé premier mouvement de Reidemeister – décrit dans la figure 2 on peut rajouter autant de croisements que l’on veut à un diagramme quelconque sans changer le noeud qu’il représente.

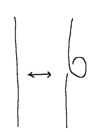
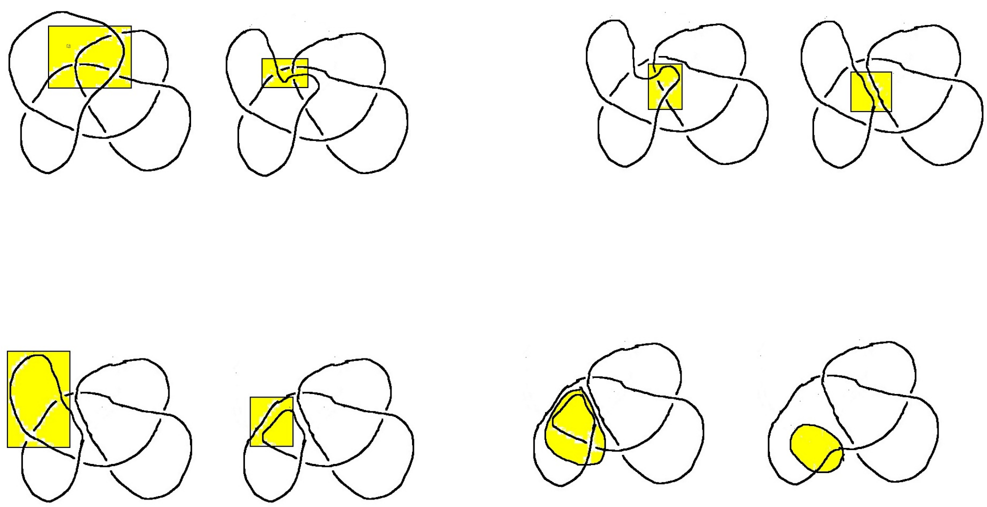


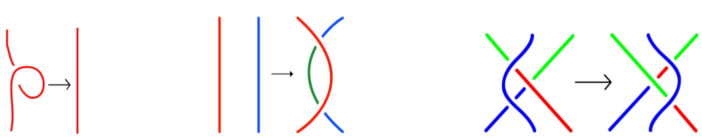
Figure 2: Premier mouvement de Reidemeister

5. Les figures suivantes décrivent comment passer du diagramme en haut à gauche au diagramme en bas à droite *via* 4 mouvements de Reidemeister.



6. Non on ne peut pas colorier le diagramme de la question 2 – diagramme du noeud de huit – avec 3 couleurs.

7. Les figures suivantes montrent comment colorier les mouvements de Reidemeister avec 3 couleurs.



8. Partant d'un diagramme colorié avec au moins 2 couleurs, un mouvement de Reidemeister le transforme en un diagramme colorié avec au moins 2 couleurs. Puisque le diagramme du noeud de trèfle peut être colorié avec 3 couleurs et que le diagramme du noeud trivial peut être colorié avec 1 couleur, on ne peut passer de l'un à l'autre par une suite de mouvements de Reidemeister.

 Stand 4 Correction 

Chaque déplacement d'Harry pour atteindre son but peut être codé de la façon suivante: on compte le nombre de cases qu'il doit parcourir vers l'Est (on les note E), puis celles qu'il doit parcourir vers le Nord (notées N).
Par exemple, dans le stand jaune, pour arriver à Buck il doit, quelque soit l'itinéraire emprunté, parcourir 5 cases vers l'Est et une vers le Nord.
On construit ensuite tous les chemins possibles.

N – E - E - E - E

Départ

N – E – E - E

E

N -E -E

E

N- E

E

E-N

Il y a donc 5 chemins possibles.
Pour tous les cas on peut raisonner comme ceci mais cela devient vite difficile.
Une deuxième solution est de calculer étape par étape i.e de calculer le nombre de chemins $C_{x,y}$ pour chaque point P de coordonnées (x,y) de la grille en utilisant le nombre de chemins pour arriver aux points de coordonnées (x,y-1) et (x-1,y), on a $C_{x,y}= C_{x, y-1}+C_{x-1,y}$. On pourra aussi utiliser le fait que $C_{x,y}=C_{y,x}$...
Les résultats pour les questions jaunes sont:
chouette: 1
Buck: 5
balai: 6
chapeau: 10
Phoenix: 20
Portoloin: 70

Pour les questions oranges on applique les mêmes méthodes et on obtient:
chouette: 1
Buck: 5
balai: 6
chapeau: 10

Phoenix: 20
Portoloin: 126.

Pour les questions bleues on pourrait appliquer le même raisonnement mais ce serait très long. On peut faire un autre raisonnement (qui serait valable pour les jaunes et les oranges d'ailleurs).

Harry doit parcourir un chemin comprenant 7 étapes vers l'Est et 8 étapes vers le Nord.
En fait, calculer le nombre de chemins possibles revient à choisir au hasard les étapes où on va à l'Est par exemple.
On choisit 7 étapes où on va à l'est parmi les 15 étapes que Harry doit faire.
Pour la première étape à l'est on a 15 choix, pour la seconde 14, pour la troisième, 13 etc.
On a donc 15*14*13*12*11*10*9 possibilités pour placer les 7 étapes vers l'est.
Mais il faut encore ne pas oublier que ces 7 étapes sont indiscernables entre elles et diviser par le nombre de permutations qui donnent le même chemin, c'est à dire 7*6*5*4*3*2*1.

On obtient donc 6435 chemins possibles!!!!!

La deuxième question est en fait la même question : combien pouvait-il concevoir de cartes avec 7 éléments parmi 15 ?...