Les Zombies corrigés

1 Questions 1, 2 et 3

Sur une grille $n \times n$, où n est nombre entier quelconque, il suffit de poser n zombies pour que les zombies finissent par occuper toute la grille. On peut les poser sur la diagonale, mais il y a d'autres possibilités par exemple (sur une grille 7×7) :

Z		Z		Z		Z
Z						
Z						
Z						

2 Questions 4 et 5

À chaque étape une case saine pour devenir contaminée doit avoir au moins deux côtés en commun avec la frontière de la zone occupée par les zombies et a donc au plus deux côtés qui ne sont pas dans la frontière de la zone occupée par les zombies.

Ainsi lorsqu'à chaque étape on adjoint une nouvelle case à la zone occupée par les zombies, celle-ci voit sa frontière perdre au moins 2 arêtes alors qu'elle en gagne au plus 2. Au final la longueur de la frontière ne peut pas augmenter.

Maintenant si au départ on a posé 8 zombies sur une grille 9×9, la zone occupée par les zombies est constituée de 8 cases. La longueur de sa frontière est donc inférieure à $32 = 4 \times 8$ (une case a 4 côtés de longueur 1). À l'issu du processus de contamination, la zone occupée par les zombies a donc une frontière de longueur inférieure à 32. Mais le périmètre de notre grille 9×9 est égal à $36 = 4 \times 9$. Puisque $36 > 32$ on conclut que 8 zombies (ou moins) ne peuvent suffire à envahir toute la grille.

Jeux de mots, les réponses

17 octobre 2011

Question 1

On se donne la règle $ab = ba$*. Montrer que* $aababba = aaaabbb$*. Montrer que* $aaba$ *n'est pas égal à* $bbab$*.*

On part de $aababba$. Le principe est de pousser les b vers la droite et les a vers la gauche : en appliquant la règle, on obtient successivement

$$aaabbba, aaabbab, aaababb, aaaabbb.$$

Ce qui montre l'égalité.

Lorsqu'on remplace ab par ba (ou réciproquement), le nombre de a et de b du mot est conservé. Les notes $aaba$ et $bbab$ ne contiennent pas le même nombre de a, ils ne sont donc pas égaux.

Finalement, ici, les choses sont simples : deux mots sont égaux si et seulement si ils contiennent le même nombre de a et le même nombre de b.

Question 2

On se donne les règles suivantes : $ac = ca$ *et* $aba = bab$ *et* $bcb = cbc$*. Pouvez-vous dire si* $abacaba$ *est égal à* $bcbabcb$ *avec ces règles ?*

Hum, pas si facile, on a vite fait de tourner en rond... Voici un calcul qui marche, où on a essayé de garder la symétrie du mot.

$$\begin{aligned} abacaba &= babcbab \quad \text{(règle 2, deux fois)} \\ &= bacbcab \quad \text{(règle 3)} \\ &= bcabacb \quad \text{(règle 1, deux fois)} \\ &= bcbabcb \quad \text{(règle 2).} \end{aligned}$$

Pouvez-vous dire si $accaaccabbc$ *est égal à* $cabbc$ *avec ces règles ?*

Ben non ! Le premier l'est trop long ! ! Le deuxième l'est trop court ! ! !

Plus précisément : chacune des trois règles conserve le nombre de lettres d'un mot. Par conséquent deux mots égaux ont le même nombre de lettres. Ces deux mots sont donc différents.

Remarquons que les choses sont bien plus compliquées qu'à la question précédente. Le nombre de lettres ne suffit pas à caractériser les mots égaux ; par exemple, on pourrait montrer que les mots a et b sont différents...

Ces règles étranges viennent en fait du “groupe des tresses” : voir par exemple cet article de vulgarisation sur les tresses.

Question 3

Est-ce que l'anti-mot de abcbac est ABCBAC ?

Non, puisque si on colle les deux, on obtient le long mot $abcbacABCBAC$, et on ne voit pas comment on pourrait le simplifier pour obtenir le mot vide. Bon, notez que "on ne voit pas" est un peu court, il faudrait un peu plus de place pour démontrer proprement que ce mot n'est pas égal au mot vide.

En tout cas, on peut facilement trouver un anti-mot pour $abcbac$, il s'agit de $CABCBA$: on écrit les anti-lettres du mot dans l'ordre inverse. En effet, on a bien

$$abcbacCABCBA = abcbaABCBA = abcbBCBA = abcCBA = abBA = aA = 0.$$

Question 4

Les règles sont $a = A$, $b = B$, $ab = ba$. Dans ce jeu, il n'y a qu'un nombre fini de mots différents. Pouvez-vous dire combien ?

En essayant un peu, on se rend compte que les mots un peu trop long peuvent tous se faire raccourcir... Au final, on se retrouve avec les mots 0, a, b et ab. Montrons ceci : tout mot est égal à l'un de ces quatre mots. Pas si facile, puisqu'il faut trouver un raisonnement qui prennent en compte tous les mots possibles !

Commençons par considérer les mots de deux lettres. Puisque $a = A$ et $b = B$, il est clair que tout mot est égal à un mot qui ne contient que des minuscules. D'autres part on a $aa = aA = 0 = bb$, et $ab = ba$. Donc tous les mots de deux lettres sont égaux à 0 ou à ab.

Si on a un mot de trois lettres, à nouveau on peut l'écrire avec seulement des minuscules. S'il contient aa ou bb il est égal à un mot de une lettre. Sinon, il ne contient aucune répétition, il n'y a que deux possibilités : aba ou bab. Mais on a $aba = aab = b$ et de même $bab = a$. Ainsi, tous les mots de trois lettres sont égaux à un mot d'une seule lettre.

Si on part d'un mot de plus de trois lettres, on va toujours pouvoir réduire sa longueur en choisissant une séquence de trois lettres et en la réduisant à une lettre. De proche en proche, on réduit la longueur jusqu'à obtenir un mot de zéro, une ou deux lettres. Ceci termine le raisonnement.

Il reste encore une chose à voir : comment peut-on être sûr que les quatre mots 0, a, b et ab sont tous différents ?

Comme dans les questions précédentes, il faut trouver un "invariant", quelque chose qui ne change pas lorsqu'on applique les règles... Moins facile, n'est-ce pas ? Les règles consistent à supprimer deux a, ou deux b, ou à permuter un a et un b. Mais c'est bien sûr : la *parité* du nombre de a ou de b ne peut pas changer. Ainsi, par exemple, a n'est pas égal à ab avec ces règles, puisque le premier contient 0 occurrence de la lettre b, alors que le second en contient une...

Question 5

Quelles sont les transformations qu'on peut faire subir à la feuille sans qu'elle change globalement d'emplacement ?

On peut la retourner en inversant la droite et la gauche, comme suggéré par l'énoncé. On peut la retourner en inversant le haut et le bas. Ces deux opérations échangent le recto et le verso. On peut la faire pivoter d'un demi-tour en la faisant glisser sur la table, ce qui ne change pas le recto et le verso. Ce qui fait trois transformations, et même quatre si on tient compte de la transformation qui ne fait rien.

En appelant a la première et b la deuxième, on s'aperçoit que la troisième correspond à ab ou à ba. Si on retourne deux fois de suite la feuille de la même façon, ceci revient à ne rien faire, ce qui correspond aux règles $aa = 0$ et $bb = 0$, ou encore $a = A$ et $b = B$.

Question 6

Le carré a plus de symétries que le rectangle, il faut donc ajouter, par exemple, la lettre c qui va désigner la rotation d'un quart de tour. Je vous laisse trouver toutes les règles de ce dernier groupe...

Coloriage de cartes et théorème des quatre couleurs

Le but de l'atelier était de colorier une carte de l'Europe en affectant à chaque pays une couleur de manière à ce que *deux pays voisins ne soient jamais de la même couleur*, et ceci *avec le moins de couleurs possible*.

Historiquement, cette question a été soulevée dès 1852 par l'anglais Francis Guthrie qui se l'est posée en regardant la carte d'Angleterre. Les mathématiciens l'ont reformulée pour lui donner une portée plus générale : si l'on dessine sur une feuille de papier un ensemble de « régions » qui se touchent par des frontières, on peut appeler cela une carte (il s'agit donc d'une carte fictive, pas de la carte d'une zone que l'on trouvera sur la Terre...) et se demander si n'importe quelle carte de ce genre peut être coloriée avec 2, ou 3, ou 4, ou... couleurs. On pourrait imaginer qu'il existe des cartes qui nécessitent un très grand nombre de couleurs pour pouvoir être coloriées avec la règle que deux pays voisins aient toujours des couleurs différentes.

On constate très rapidement que 2 couleurs ne suffisent presque jamais. En essayant avec 3 couleurs, on finit par se rendre compte que ce n'est pas non plus suffisant en général : par exemple, considérons la région composée par la France, la Belgique, l'Allemagne et, enserré entre ces trois pays, le Luxembourg. N'importe lequel de ces quatre pays touche les trois autres, et on en déduit facilement que 4 couleurs sont nécessaires pour colorier cette région : en effet, si on colorie le Luxembourg en bleu, puis la Belgique en vert, alors l'Allemagne, qui touche les deux pays précédents, doit être coloriée d'une troisième couleur, disons en rouge ; alors la France, qui touche les trois précédents, ne peut être coloriée ni en bleu, ni en vert, ni en rouge.

On a su montrer assez rapidement que 5 couleurs permettent toujours de colorier une carte ; ce n'est pas évident ! Les mathématiciens pensaient qu'en fait 4 couleurs suffisaient, et cette question restée ouverte a été baptisée « problème des 4 couleurs ». Ce problème est resté longtemps résolu. Finalement, en 1976, les Américains Kenneth Appel et Wolfgang Haken ont montré qu'on pouvait ramener le coloriage de n'importe quelle carte au coloriage de 1478 configurations particulières. À l'aide d'un ordinateur, ils ont montré que chacune de ces configurations particulières pouvait être coloriées avec 4 couleurs, prouvant ainsi le « théorème des 4 couleurs ». C'était la première fois que la preuve d'un résultat mathématique utilisait de manière cruciale l'aide d'un ordinateur, et cela a suscité de vifs débats. Nous invitons les lecteurs à consulter la page Wikipedia consacrée à ce sujet :

`http://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_des_quatre_couleurs`

Stand maths et littérature

Question orange

Le graphe représenté sur la feuille est un graphe complet i.e. possédant *n* sommets tous reliés deux à deux par une arête, ici n=5.
Un graphe complet a pour propriété d'être hamiltonien i.e il posséde au moins un cycle passant par tous les sommets une et une seule fois.
On peut trouver plusieurs tels chemins, celui qui a un sens est celui qui donne le message caché qui est le suivant : Surtout, sors.
Ce pentagone a été utilisé par Jacques Roubaud dans son livre intitulé « Parc Sauvage ».

Questions bleues

Question 1 :

La troisième strophe est
Chanter
Danser
Rire.

En effet si on code les strophes avec des chiffres, le passage de la première strophe à la seconde est donné par le processus suivant : le premier mot est remplacé par le troisième, le second par le premier et le troisième par le second. On peut le coder ainsi :
1->3
2->1
3->2.
Pour obtenir la troisième strophe on applique à nouveau ce processus à la seconde et on obtient :
3->2
1->3
2->1.

Question 2 :

Si on recommence on obtient
2->1
3->2
1->3 et on retrouve la première strophe.
On voit qu'on a permuté les trois lettres en suivant le chemin :
1->3->2->1, avant de revenir sur 1 on a appliqué 3 fois le processus, on dit qu'on a un chemin de longueur 3 ou un cycle de longueur 3.

Question 3 :

On utilise le même codage avec des chiffres que pour résoudre la question précédente, on voit que le premier mot est remplacé par le sixième, le second par le premier, le troisième par le cinquième, le quatrième par le second, le cinquième par le quatrième et le sixième par le troisième.
1->6
2->1
3->5
4->2

5->4
6->3

Le chemin à suivre est donc 1->6->3->5->4->2->1, on remarque qu'avant de revenir sur 1 on applique 6 fois le processus, on dit que c'est un cycle de longueur 6.

En recommençant 6 fois de suite on obtient les strophes suivantes :
6->3->5->4->2->1
1->6->3->5->4->2
5->4->2->1->6->3
2->1->6->3->5->4
4->2->1->6->3->5
3->5->4->2->1->6.
Au bout de 6 fois on retrouve la première strophe.

Pour le second exemple on a :
1->3
2->5
3->4
4->1
5->6
6->2
le chemin à suivre se coupe donc en deux 1->3->4->1 , 2->5->6->2. On remarque que ces deux sous-chemins sont tous les deux de longueur 3, il faudra donc appliquer 3 fois le processus pour revenir à la strophe de départ.

Question 4 :

Rappelons les deux processus :

1 ->3	1 ->6
2 ->1	2 ->1
3 ->2	3 ->5
	4 ->2
	5 ->4
	6 ->3

D'une part, on a à chaque fois un cycle, de longueur 3 dans le premier cas, de longueur 6 dans le second.
D'autre part, on remarque que dans les deux cas on a
1->n
2i->i
n-> (n+1)/2 +1 si n est impair n/2 si n pair.
On a donc pour l'instant
1->9
2->1
4->2
6->3
8->4
9->5
Il reste à trouver les images de 3, 5, 7 qui peuvent prendre pour valeurs 6, 7,8.
Si 3 ->6 alors comme 6 donne 3 on n'aura pas un cycle de longueur 9 (pour avoir un cycle de longueur 9 il faut qu'on retombe sur la valeur initiale au bout de 9 tours or si 3->6 et 6->3, on a 3-

>6->3 au bout de deux tours).
Si 3->7, 5->8, 7->6, alors on a
1->9->5->8->4->2->1, i.e un cycle de longueur 6, ce qui ne convient pas non plus.
On a donc 3->8.
7 ->7 est impossible (cycle de longueur 0), donc le choix finalement est
7->8
5->7.

On a

1->**9**	**1->6**	**1->3**
2->**1**	**2-> 1**	**2->1**
3->**8**	**3-> 5**	**3->2**
4->**2**	**4-> 2**	
5->**7**	**5-> 4**	
6->**3**	**6->3**	
7->**6**		
8->**4**		
9->**5.**		

Avec ce nouvel exemple on remarque qu'on a une suite décroissante d'entiers en rouge et une suite croissante d'entiers en vert, on applique ce processus, on obtient
pour n impair:
1->n
2->1
3->n-1
4->2
….
n-1->(n-1)/2
n->(n+1)/2
pour n pair
1->n
2->1
…
n-1->n/2+1
n->n/2.

Vous trouverez plus de détails et les liens avec la littérature dans le document de Michèle Audin
*www-irma.u-strasbg.fr/~m**audin**/ExposeRennes.pdf*

Stand Fête de la Science: Crème Catalane

Contents

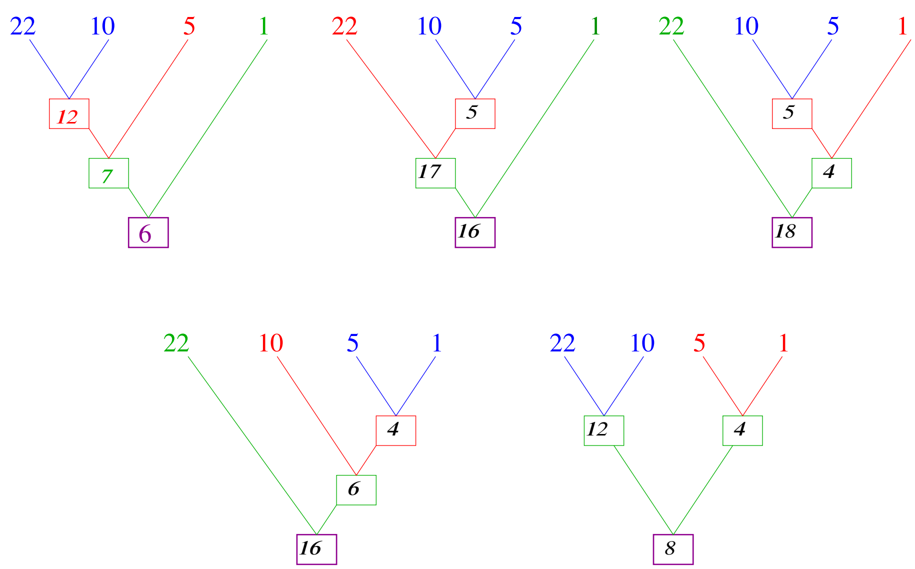
1 Questions/Réponses Jaunes

1.1 Soustraction

De la même manière qu'une virgule peut changer le sens d'une phrase, des parenthèses peuvent changer le résultat d'un calcul. Par exemple, $(22-10)-5=7$ alors que $22-(10-5)=17$.

On propose d'effectuer le calcul $22-10-5-1$ en laissant les nombres dans cet ordre mais en effectuant les opérations dans des ordres différents. On utilise des arbres pour visualiser l'ordre des calculs.

Effectuer les opérations suivantes d'après le modèle:



Combien de résultats différents obtenez-vous? Essayer avec d'autres nombres au départ, à la place de 22,10,5,1.

On obtient 4 résultats différents! Deux arbres donnent le même résultat: 16!

Ceci n'est pas un hasard! Si on essaye avec d'autres nombres au départ les résultats des deux arbres sont toujours les mêmes (voir question orange pour plus d'explications).

1.2 Triangulations

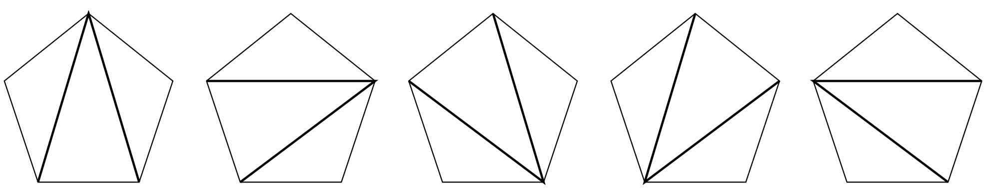
Questions:
Dans un polygone, on appelle diagonale tout segment joignant deux sommets non consécutifs.

1. Tracer dans un pentagone le plus de diagonales possibles qui ne se coupent pas. Combien de configurations différentes obtenez-vous? Combien y a-t-il de diagonales dans chaque configuration?

2. Même question avec un hexagone.

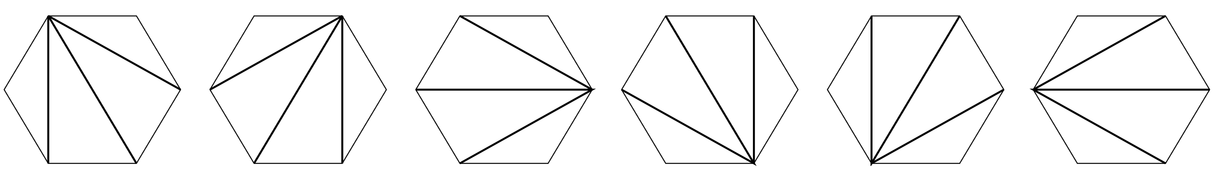
3. Pourquoi appelle-t-on ça une triangulation?

Réponses:
On obtient 5 configurations possibles pour le pentagone (toujours la même, qu'on tourne!). Elles contiennent toutes 2 diagonales.

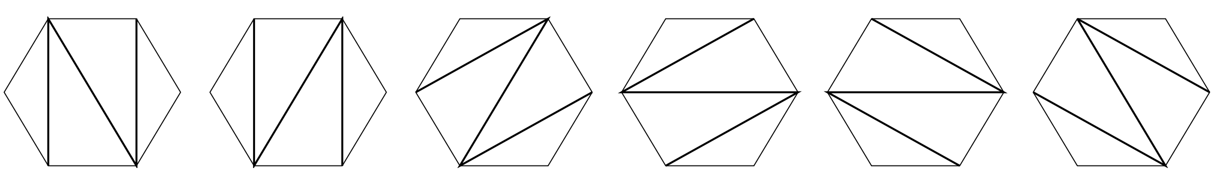


.

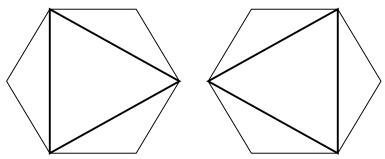
Pour les hexagones, on obtient au total 14 configurations, contenant toutes 3 diagonales. Ces configurations se classent en trois familles: les 6 *pattes d'oie*:



les 6 *zig-zags*,



et 2 *triangles intérieurs*,



Toutes ces configurations découpent les polygones en triangles, c'est pour cela qu'on les appelle des *triangulations*.

2 Questions/Réponses Oranges

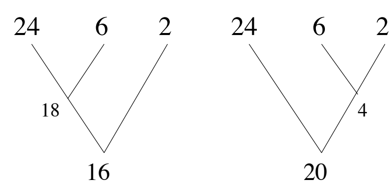
2.1 Parenthésages et arbres

Questions

De la même manière qu'une virgule peut changer le sens d'une phrase, des parenthèses peuvent changer le résultat d'un calcul. Par exemple, avec la soustraction et les nombres $24, 6, 2$ donnés dans cet ordre, si on effectue $24 - (6 - 2)$ ou $(24 - 6) - 2$, on n'obtient pas le même résultat.

1. Donner des exemples d'opérations usuelles $*$ pour lesquelles l'égalité $(a * b) * c = a * (b * c)$ est toujours satisfaite, et des exemples pour lesquels l'égalité n'est pas satisfaite en général.

Quand il s'agit de faire des opérations avec 3 nombres a, b, c donnés dans cet ordre, il n'y a que deux possibilités d'effectuer le calcul: $(a * b) * c$ ou $a * (b * c)$. Avec $4, 5, 6, \ldots$ nombres les possibilités deviennent de plus en plus grandes. Pour visualiser le calcul, on utilise des arbres. La figure suivante représente les calculs $(24 - 6) - 2$ et $24 - (6 - 2)$:

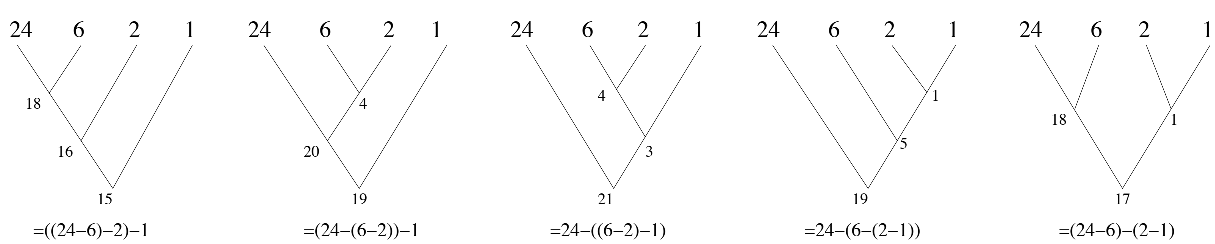


2. Trouver toutes les possibilités de calculs pour $24 - 6 - 2 - 1$, en les associant à des arbres.

3. Combien de résultats différents obtenez-vous? Pouvez vous l'expliquer?

Réponses:

1. Pour l'addition et la multiplication, on a toujours $(a+b)+c = a+(b+c)$ et $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$. On dit que ces opérations sont *associatives*. En revanche ce n'est plus le cas pour la soustraction et la division. Par exemple, pour la soustraction $24 - (6 - 2) = 20$ alors que $(24 - 6) - 2 = 16$, et pour la division $(24 \div 6) \div 2 = 2$ alors que $24 \div (6 \div 2) = 8$.
2. Il y a 5 possibilités de parenthésages/arbres :



3. Les arbres numero 2 et 4 ci-dessus donnent le même résultat, bien que les schemas de calculs soient différents. Ceci n'est pas un hasard, on peut s'en convaincre en utilisant d'autres nombres au départ. Ceci s'explique algébriquement en utilisant les règles de calculs concernant le signe $-$ devant une parenthèse. L'arbre numero 2 symbolise l'opération $(a-(b-c))-d$, le numero 4 l'opération $a-(b-(c-d))$. En développant, on obtient:

$$\begin{aligned}(a-(b-c))-d &= (a-b+c)-d\\ &= a-b+c-d\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}a-(b-(c-d)) &= a-(b-c+d)\\ &= a-b+c-d\end{aligned}$$

2.2 Triangulations

Questions

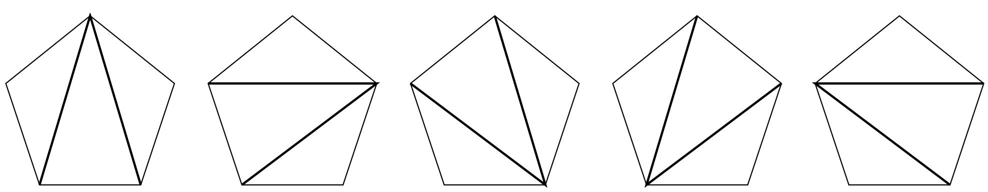
Dans un polygone convexe, on appelle diagonale tout segment joignant deux sommets non consécutifs. Une triangulation d'un polygone est un découpage du polygone avec le plus de diagonales possibles qui ne s'intersectent pas.

1. Donner une triangulation d'un pentagone. Est-ce la seule possible? Combien de configurations obtenez-vous? Même question avec un hexagone.

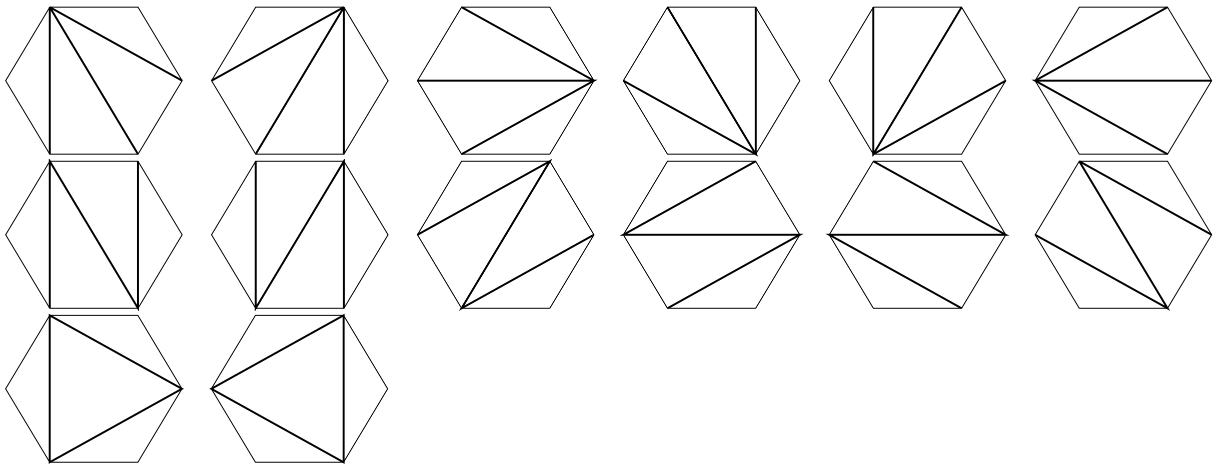
2. Combien y a-t-il de diagonales dans chaque configuration? Combien de triangles?

Réponses:

On obtient 5 configurations possibles pour le pentagone (toujours la même, qu'on tourne!). Elles contiennent toutes 2 diagonales.



Pour les hexagones, on obtient au total 14 configurations, contenant toutes 3 diagonales. Ces configurations se classent en trois familles, les 6 *pattes d'oie*, les 6 *zig-zags*, et 2 *triangles intérieurs*:

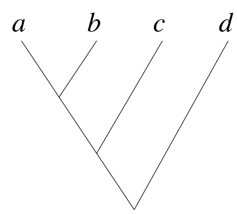


Toutes ces configurations découpent les polygones en triangles, c'est pour cela qu'on les appelle des *triangulations*.

3 Questions/Réponses Bleues

3.1 Parenthésages et arbres

Questions
De la même manière qu'une virgule peut changer le sens d'une phrase, des parenthèses peuvent changer le résultat d'un calcul. Pour certaines opérations connues, les calculs $(a * b) * c$ et $a * (b * c)$ ne donnent pas le même résultat. On code les calculs à l'aide d'*arbres*. Par exemple le calcul $((a * b) * c) * d$ est codé par:

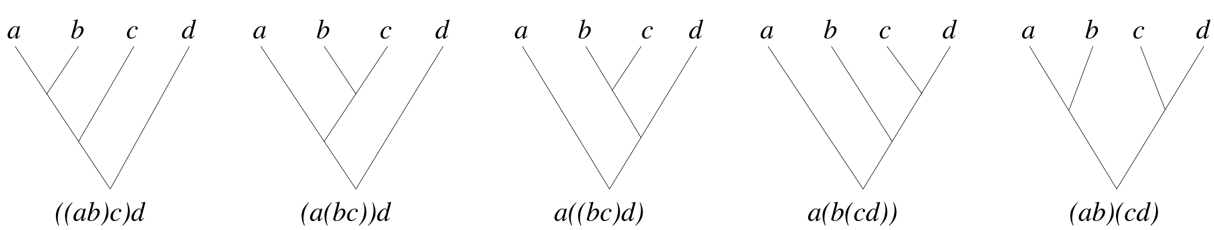


1. Donner un exemple d'opération $*$ pour laquelle $(a * b) * c \neq a * (b * c)$

2. Faire la liste de tous les parenthésages possibles avec quatre nombres donnés dans l'ordre $a * b * c * d$ et dessiner l'arbre associé.

3. Combien de paires de parenthèses avez-vous utilisé autour de $a * b * c * d$? Combien en faudra-t-il autour de $a * b * c * d * e$? de n nombres $a_1 * a_2 * \cdots * a_n$?

Réponses:
1. Pour l'addition et la multiplication, on a toujours $(a + b) + c = a + (b + c)$ et $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$. On dit que ces opérations sont *associatives*. En revanche ce n'est plus le cas pour la soustraction et la division. Par exemple, pour la soustraction $24 - (6 - 2) = 20$ alors que $(24 - 6) - 2 = 16$, et pour la division $(24 \div 6) \div 2 = 2$ alors que $24 \div (6 \div 2) = 8$. 2. Il y a 5 possibilités de parenthésages/arbres :



3. Le parenthésage autour de 4 nombres nécessite 2 paires de parentèses, autour de 5 nombres 3 paires, ..., autour de n nombres $n - 2$.

3.2 Triangulations

Questions

Dans un polygone convexe, on appelle diagonale tout segment joignant deux sommets non consécutifs. Une triangulation d'un polygone est un découpage du polygone avec le plus de diagonales possibles qui ne s'intersectent pas.

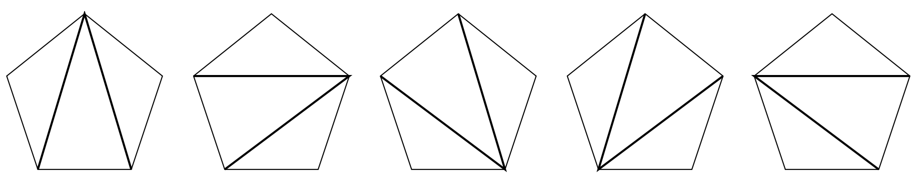
1. Donner une triangulation d'un pentagone. Est-ce la seule possible? Combien de configurations obtenez-vous? Même question avec un hexagone.

2. Combien de diagonales faut-il pour trianguler un polygone à n cotés.

3. Partant d'une triangulation, si on enlève une diagonale au hasard, combien de nouvelle(s) configuration(s) peut-on construire?

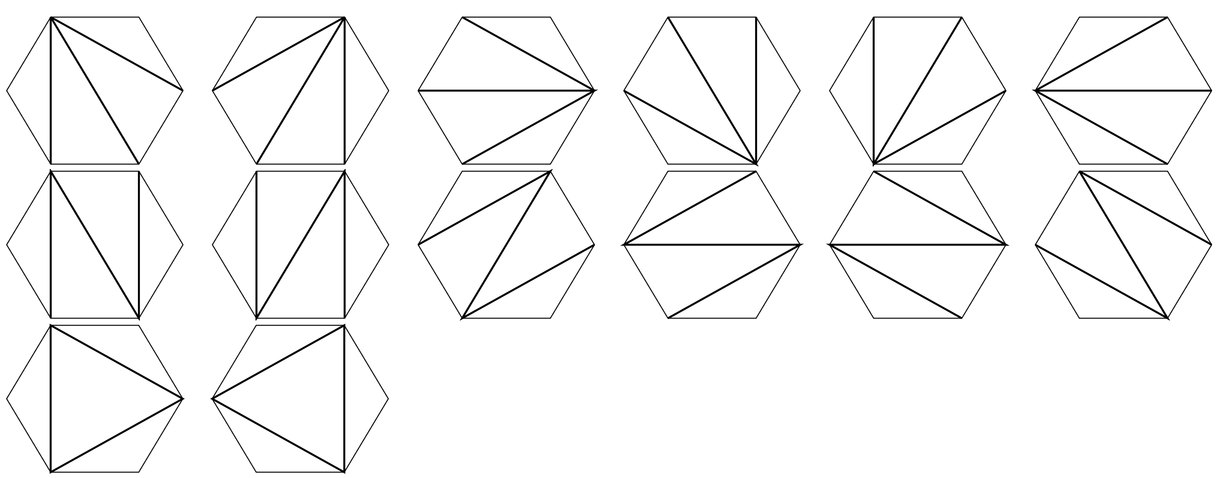
Réponses:

1. On obtient 5 configurations possibles pour le pentagone (toujours la même, qu'on tourne!). Elles contiennent toutes 2 diagonales. Pour les hexagones, on obtient au total

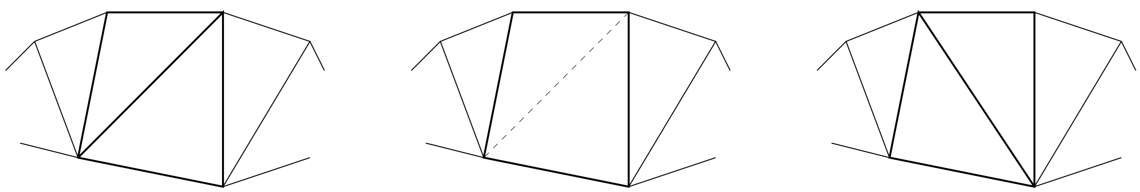


.

14 configurations, contenant toutes 3 diagonales. Ces configurations se classent en trois familles, les 6 *pattes d'oie*, les 6 *zig-zags*, et 2 *triangles intérieurs*:

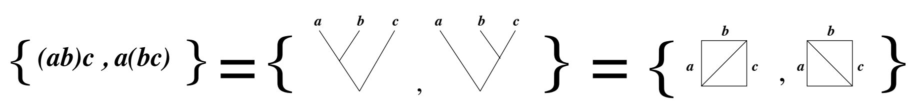


2. On peut trianguler tout polynôme à n côtés en utilisant une configuration *patte d'oie* (ça peut faire beaucoup d'orteils pour une seule patte ...). C'est à dire qu'on sélectionne un sommet, et on trace toutes les diagonales partant de ce sommet. Il y en a alors $n-3$ (on relie tous les sommets sauf celui de départ et ses deux voisins). En fait on peut montrer (par exemple par récurrence) que toute triangulation (pas nécéssairement pattes d'oie) contient $n-3$ diagonales.
3. Si on enlève une diagonale, on forme "localement" un quadrilatère. La seule façon d'obtenir alors une nouvelle triangulation est d'utiliser l'autre diagonale du quadrilatère.



3.3 Parenthèses, arbres, triangulations, nombres de Catalan

Il est connu que l'ensemble des parenthésages autour de n nombres, l'ensemble des arbres à n feuilles et l'ensemble des triangulations d'un polygone à $n+1$ cotés peuvent s'identifier.



Le nombre d'éléments dans un de ces ensembles est appelé $(n-1)$-ième nombre de Catalan et noté K_{n-1}. Il est donné par une formule explicite faisant intervenir un coefficient binomial:

$$K_{n-1} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}.$$

Les mathématiciens ont décrit 193 ensembles différents de cardinal K_{n-1}. Certaines propriétés s'interprètent plus facilement dans un ensemble plutôt qu'un autre.

Expliquer pourquoi dans un parenthésage autour de n nombres si on enlève une paire de parenthèses, il n'y a qu'une seule façon de la mettre ailleurs.

C'est une question difficile si on la formule en termes de parenthésage. En utilisant la correspondance ci-dessus, cette question se traduit en terme de diagonales dans une triangulation. C'est la même question que la question 3 au paragraphe 3.2 !