La sorcière n'aimait que le bleu

- Une remarque de présentation : il peut être commode de présenter l'activité comme un jeu solitaire, pour accéder au vocabulaire qui va avec (jouer un coup, perdre ou gagner la partie).
- Une remarque didactique : lorsqu'on présente le jeu, il vaut mieux laisser les participants réfléchir déjà à ce qui se passe lorsqu'on part d'une configuration avec le même nombre de pots de chaque couleur (même si c'est très facile et si le texte passe (trop) rapidement dessus).
- Ne pas donner trop vite les indications sur l'invariant de parité ! Le stand est conçu pour laisser les participants réfléchir un peu par eux-mêmes.

Pour comprendre complètement le problème, le bon invariant consiste à regarder la parité du nombre de pots de chaque couleur : en effet, quel que soit le sort utilisé, chacun des trois nombres change de parité. Lors d'une "partie", les triplets de parité alternent donc dans l'un des quatre groupes suivants :

(1) P P P $\leftrightarrow$ I I I (2) I P P $\leftrightarrow$ P I I

(3) P I P $\leftrightarrow$ I P I (4) I I P $\leftrightarrow$ P P I

Muni de cet invariant, le plus facile est d'en déduire les cas impossibles : lorsque Rouge et Jaune n'ont pas la même parité, ceci reste vrai tout au long de la partie, et on ne pourra donc jamais les mettre simultanément à zéro : la sorcière perd la partie. Ceci résout les cas (3) et (4) ci-dessus ainsi que les questions 2 et 3 sur les trois fiches.

Pour le cas (2), on peut appliquer le même raisonnement au couple de couleur Bleu, Rouge qui n'ont pas la même parité, et aussi au couple Bleu, Jaune. On en déduit qu'une partie ne peut pas se terminer par l'annulation de Bleu et Rouge, ni par l'annulation de Bleu et Jaune. D'autre part, tant qu'il reste plus d'une couleur, on peut continuer à jouer, et à chaque coup le nombre total de pots diminue d'une unité, donc la partie doit se terminer par l'annulation de deux des couleurs. Par élimination, la partie se termine par l'annulation de Rouge et Jaune, comme voulu (et ce quelle que soit la suite des sorts choisis). Donc dans la question 1 et la question 4 des trois fiches, la sorcière est sûre de gagner !

Le cas (1) est un petit peu plus délicat, et n'est abordé sur un exemple que dans la fiche bleue (question 5). D'abord, on doit évidemment exclure le cas où on partirait d'une configuration perdante : avec uniquement

des pots Rouge, ou uniquement des pot Jaunes. Hormis ce cas désespéré, la sorcière peut toujours gagner, voici pourquoi. Examinons l'une des deux façons de perdre (l'autre étant symétrique), celle où la sorcière reste avec uniquement des pots Rouges. La seule façon d'aboutir à cette situation consiste à passer par la situation où il reste exactement 1 pot Bleu et 1 pot Jaune et de les transformer en un pot Rouge. Mais dans cette situation la parité était I I I, il y avait donc au moins un pot Rouge : pour éviter de perdre, il suffisait donc à la sorcière d'éviter le coup perdant et de le remplacer par l'une des deux autres versions du sort. En résumé, dans la configuration (1), la sorcière peut toujours éviter les coups perdants

$$1\ 1\ \mathrm{I} \to 0\ 0\ \mathrm{P} \quad \text{et } 1\ \mathrm{I}\ 1 \to 0\ \mathrm{P}\ 0$$

et en adoptant cette stratégie le jeu ne peut que s'arrêter sur une configuration gagnante, comme dans le cas précédent.

NB : les questions posées dans les fiches jaune et orange du stand laissent volontairement de côté le cas délicat.