

2015
2016

Master 2 LOGIQUE MATHÉMATIQUE ET FONDEMENTS DE L'INFORMATIQUE

Domaine : Sciences, Technologies, Santé
Mention : Mathématiques et Applications

Responsables pédagogiques :
Martin Hils & Alexis Saurin

<http://www.math.univ-paris-diderot.fr/m2lmfi/>

SOMMAIRE

Conditions d'admission	5
Organisation du M2 LMFI.....	6
Validation du M2 LMFI.....	7
Informations pratiques	8
Après le M2 LMFI... ..	9
LISTE DES ENSEIGNEMENTS 2015-2016	10
Cours préliminaire intensif de logique	11
Théorie des modèles et théorie des ensembles, incomplétude	12
Théorie de la démonstration, calculabilité, complexité.....	13
Groupe de travail sur les cours fondamentaux.....	14
Théorie des modèles : outils classiques	15
Théories des modèles des corps valués	16
Forcing pour les mathématiciens.....	18
Théorie descriptive des ensembles	19
Preuves et programmes : outils classiques	21
Contenu calculatoire des preuves de la logique classique	22
Automates sur mots finis ou infinis.....	23
Logiques et langages pour la complexité	24
Modèles de la programmation.....	26
Initiation à la preuve formelle assistée par ordinateur.....	27
O-minimalité	28

Le M2 LMFI est le seul M2 français dédié à la logique mathématique et à ses applications à l'informatique. Il forme des logiciens de haut niveau et les prépare au doctorat, aux carrières universitaires, à l'enseignement et à des métiers de la R&D.

Cette formation, qui est l'une des spécialités du Master mention Mathématiques et Applications de l'Université Paris Diderot - Paris 7, est le fruit d'une longue tradition logique à Paris 7, notamment à travers le DEA de Logique de l'Université Paris 7.

Le M2 LMFI s'appuie sur deux laboratoires d'accueil prestigieux, de l'Université Paris-Diderot et du CNRS, couvrant la plupart des branches de la logique mathématique et informatique :

- * Équipe de logique mathématique de l'Institut de Mathématiques de Jussieu (IMJ)

UMR 7586 du CNRS – <http://www.logique.jussieu.fr>

- * Laboratoire Preuves, Programmes, Systèmes (PPS)

UMR 7126 du CNRS – <http://www.pps.univ-paris-diderot.fr>

CONTACTS	
Responsables pédagogiques du M2 :	
Martin Hils	Alexis Saurin
 hils@math.univ-paris-diderot.fr	 saurin@pps.univ-paris-diderot.fr
Localisation : Site PRG (13 ^{ème}) Bâtiment Sophie Germain 8 place FM/13 (en cours de nomination) entrée au croisement de l'avenue de France et de la rue Alice-Domon et Léonie-Duquet	
6 ^{ème} étage, bureau 6022 -  01 57 27 91 52	3 ^{ème} étage, bureau 3040 –  01 57 27 93 37
Le secrétariat du M2 : Catherine PRUDLO	
 catherine.prudlo@univ-paris-diderot.fr	
5 ^{ème} étage, bureau 5055 -  01 57 27 93 06	
Adresse postale : Université Paris Diderot – Paris 7 UFR de Mathématiques Bâtiment Sophie Germain – Case 7012 75205 Paris cedex 13	
Site internet du M2 : http://www.math.univ-paris-diderot.fr/m2lmfi	

CONDITIONS D'ADMISSION

Le candidat devra avoir validé une 1^{ère} année de Master (M1), une Maîtrise ou un titre équivalent. Cette première année devra avoir été effectuée dans une spécialité mathématique, informatique, ou logique (dans ce dernier cas, par exemple, dans le cadre d'un master de philosophie).

➤ **Candidature des étudiants étrangers (hors EEE et Suisse) :**

Afin de faciliter la mobilité internationale, l'Université Paris Diderot adhère à l'Agence Campus France.

Nous invitons les étudiants des pays concernés (<http://www.campusfrance.org/fr/node/1246>) à se renseigner sur le site de Campus France (<http://www.campusfrance.org/fr>) et à s'inscrire auprès de cet organisme avant mars 2015.

➤ **Pour toutes les autres candidatures :** Les étudiants doivent déposer une demande de pré-inscription sur le site web : <https://ecandidat.app.univ-paris-diderot.fr> puis transmettre par voie postale le dossier de pré-inscription avec les pièces justificatives.

Période de préinscription sur e-candidat :

Du 20 mai 2015 au 30 juin 2015.

Du 25 août 2015 au 5 septembre 2015.

Les dossiers de candidature envoyés avant le 4 juillet 2015 bénéficieront d'une réponse mi-juillet, les autres en septembre.

Date limite de remise du dossier d'admission : 5 septembre 2015.

Date limite d'inscription administrative : 30 octobre 2015.

Pour toute demande de renseignement complémentaire, vous pouvez consulter le site :

<http://www.math.univ-paris-diderot.fr/m2lmfi/>

ou vous adresser aux Responsables de la formation ou au secrétariat du master 2 (voir la rubrique contact).

ORGANISATION DU M2 LMFI

Offre d'enseignement du diplôme :

Le Master 2^{ème} année LMFI propose

au premier semestre :

- **un cours préliminaire intensif de logique** (30h), facultatif
- **un tronc commun constitué de deux cours fondamentaux** (60h chacun)
- **les groupes de travail** des cours fondamentaux (36h chacun)

au second semestre :

- **des cours d'orientation** (48h chacun),
- **des cours d'ouverture** (24h chacun),
- **une initiation à la recherche sous forme d'un stage**

La liste et le programme des différents cours se trouvent en page 10 et suivantes.

Stage d'initiation à la recherche

Le stage de M2 du LMFI peut s'effectuer :

- soit dans un laboratoire universitaire, par exemple dans une des deux équipes d'accueil : l'équipe de Logique Mathématique ou le laboratoire Preuves, Programmes, Systèmes,
- soit dans un autre laboratoire de recherche, en France ou à l'étranger, après accord du responsable du M2.

Dans tous les cas, il est placé sous la responsabilité d'un enseignant du Master, enseignant référent du stage. Le travail de recherche, d'une durée d'au moins 3 mois, donne lieu à la rédaction d'un mémoire et à une soutenance devant un jury de stage.

Calendrier 2015–2016

- **1 au 11 septembre 2015** : cours préliminaire intensif de logique
- **14 septembre au 4 décembre 2015** : cours fondamentaux
- **début décembre** : réunion de présentation des cours du second semestre
- **7 au 11 décembre 2015** : rattrapage de cours et révisions
- **14 au 18 décembre 2015** : semaine d'examens du 1^{er} semestre
- **21 décembre 2015 au 3 janvier 2016** : vacances de fin d'année
- **4 janvier au 25 mars 2016** : cours du second semestre
- **29 mars au 1 avril 2016** : rattrapage de cours et révisions
- **4 au 15 avril 2016** : semaine d'examens du 2nd semestre
- **printemps et été 2016** : stage d'initiation à la recherche

VALIDATION DU M2 LMFI

La validation de la 2^{ème} année de Master correspond à l'acquisition de 60 crédits ECTS selon les modalités suivantes :

- Validation des deux cours fondamentaux (10 ECTS chacun).
- Validation de deux cours d'orientation (9 ECTS chacun).
- Validation de 6 ECTS d'ouverture, qui peuvent être obtenues, au choix :
 - par la validation de deux cours d'ouverture (24h et 3 ECTS chacun)
 - par la validation d'un troisième cours d'orientation (6 ECTS)
- Le stage est crédité de 16 ECTS.

Les cours d'orientation sont à choisir dans la liste proposée par le M2 (voir les cours spécialisés décrits dans la présente brochure) ou, après accord des responsables, parmi des unités d'un autre M2, par exemple dans le M2 Mathématiques Fondamentales ou dans le MPRI (Master Parisien de Recherche en Informatique).

L'attribution des ECTS correspondant à chacun des modules précédents est conditionnée par l'obtention, pour ce module, d'une note supérieure ou égale à 10. Cependant une compensation est possible entre les deux notes F_1 et F_2 des cours fondamentaux, sous réserve qu'elles soient toutes deux supérieures ou égales à 7 et que leur moyenne soit supérieure ou égale à 10.

Il est attribué une note finale du M2, qui est la moyenne entre $(F_1+F_2)/2$, O_1 , O_2 et S , où O_1 et O_2 sont les notes obtenues aux cours d'orientation et S la note de stage.

Les notes obtenues aux modules des cours d'ouverture n'interviennent donc pas dans la note finale, mais conditionnent l'obtention des crédits correspondants.

Le cours préliminaire de logique est facultatif mais fortement recommandé pour la validation du 1^{er} semestre car il expose les pré-requis de logique.

Jury du Master

Le jury du M2 de Logique Mathématique et Fondements de l'Informatique est nommé en début d'année universitaire. Pour information, le jury était constitué comme suit pour l'année universitaire 2014-2015 :

HILS Martin,	Maître de Conférences à l'Université Paris Diderot - Paris 7
SAURIN Alexis,	Chargé de recherche CNRS, Président
DURAND Arnaud,	Professeur à l'Université Paris Diderot - Paris 7,
EHRHARD Thomas,	Directeur de Recherche CNRS
MEREL Loïc,	Professeur à l'Université Paris Diderot - Paris 7
ROZIÈRE Paul,	Maître de Conférences à l'Université Paris Diderot - Paris 7,
VELICKOVIC Boban,	Professeur à l'Université Paris Diderot - Paris 7

INFORMATIONS PRATIQUES

Bourses et/ou logement en résidence universitaire

Le ministère chargé de l'Enseignement supérieur accorde aux étudiants, un certain nombre d'aides gérées par le CROUS, en lien avec les universités : bourses sur critères sociaux, aide d'urgence annuelle, bourses de mobilité, passeport mobilité, prêts d'honneur, bourses de mérite...

Des informations sont disponibles sur la page du « Bureau de la vie étudiante » :

http://www.univ-paris-diderot.fr/sc/site.php?bc=vie_etudiante&np=Aides

Pour de plus amples informations, vous devez prendre contact avec le CNOUS : <http://www.cnous.fr>

Restauration

Le campus de Paris Diderot dispose d'un restaurant universitaire.

Ressources pour les étudiants

Les étudiants du M2 ont accès à la bibliothèque de Mathématiques-Recherche (Bâtiment Sophie Germain, 8^{ème} étage) ainsi qu'à quelques ouvrages mis à la disposition des étudiants par le M2.

Par ailleurs, l'Université Paris Diderot dispose de salles informatiques et de salles de travail en accès libre pour les étudiants.

Les laboratoires d'accueil du M2 sont situés dans le bâtiment Sophie Germain et les étudiants du M2 sont encouragés à assister aux séminaires de recherche de ces laboratoires, au moins à partir du début du second semestre.

APRÈS LE M2 LMFI...

Débouchés

La suite naturelle de cette formation est la préparation d'un doctorat, soit en logique mathématique, soit en informatique. Pour un doctorat en informatique, la thèse peut éventuellement être préparée dans une entreprise ou un organisme public de recherche (INRIA, CEA...).

Les débouchés sont des postes d'enseignant-chercheur ou de chercheur :

- soit dans le milieu universitaire (français ou étranger) ou des organismes publics de recherche (CNRS, INRIA, CEA, ONERA, etc.).
- soit dans les services de recherche et développement d'entreprises du monde industriel (EDF, France Telecom, Siemens, EADS, etc.).

Les services de recherche et développement de ces entreprises sont particulièrement demandeurs d'étudiants ayant une forte compétence à la fois mathématique, logique et informatique, leur permettant d'encadrer des ingénieurs travaillant dans les domaines de la certification de logiciels, de la vérification de programmes et de protocoles, ainsi que de la sécurité informatique. Dans certains cas, le recrutement peut s'effectuer directement à l'issue du master 2^{ème} année.

Le Doctorat

La durée conseillée des études doctorales est de trois ans. Une année supplémentaire peut être accordée après examen du dossier (comprenant un rapport du directeur de thèse prouvant l'avancement des travaux) et autorisation du directeur de thèse, du directeur de l'École Doctorale, et du Président de l'Université. Le doctorat débute normalement en 6^{ème} année des études universitaires et s'adresse aux étudiants titulaires d'un Master ou d'un diplôme de niveau équivalent.

Contrat doctoral

Il s'agit d'un contrat d'une durée de 3 ans.

L'École Doctorale Sciences Mathématiques de Paris-Centre dispose d'un petit nombre de ces contrats pour les étudiants titulaires du Master et désireux de préparer une thèse de doctorat.

Rémunération (depuis le 1er juillet 2010) :

- **1684,93 euros bruts** si le doctorant contractuel effectue uniquement de la recherche.
- **2024,70 euros bruts** s'il effectue des activités complémentaires, par exemple de l'enseignement.

D'autres types de financements sont possibles : projets ANR, bourses INRIA, allocations de la région Île-de-France, allocations doctorales PGSM, ...

Conditions d'obtention du contrat doctoral. L'étudiant qui désire obtenir un contrat doctoral en vue de préparer une thèse doit faire acte de candidature auprès des responsables du M2 au cours de l'année universitaire.

Le jury du M2 établit un classement des dossiers (sur critères scientifiques). L'examen des dossiers a lieu pendant la deuxième quinzaine du mois de juin.

Les étudiants de nationalité étrangère, hors Union Européenne, sont invités à se renseigner sur les conditions exigées dans leur cas.

LISTE DES ENSEIGNEMENTS 2015-2016

1^{er} SEMESTRE

Cours préliminaire intensif de logique (*M. H. Mourgues*)

Cours fondamentaux

- CF1 : Théorie des modèles, des ensembles et incomplétudes (*T. Tsankov*)
- CF2 : Théorie de la démonstration, calculabilité, complexité (*H. Fournier & T. Joly*)

Groupes de travail sur les cours fondamentaux (*P. Simonetta, S. Boughattas & T. Joly*)

2^{ème} SEMESTRE

Cours d'orientation

- **Théorie des modèles :**
Outils classiques (*F. Point*)
Théorie des modèles des corps valués (*M. Hils*)
- **Théorie des ensembles :**
Forcing pour les mathématiciens (*B. Velickovic*)
Théorie descriptive des ensembles (*F. Le Maître*)
- **Preuves et programmes :**
Outils classiques (*A. Saurin & C. Tasson*)
Contenu calculatoire des preuves de la logique classique (*H. Herbelin*)
- **Calculabilité et complexité :**
Automates sur mots finis et infinis (*D. Caucal & Olivier Finkel*)
Logiques et langages pour la complexité (*P. Baillot, A. Durand*)

Cours d'ouverture

- Modèles de la programmation (fonctionnelle, impérative, objet) (*P. Letouzey*)
- Initiation à la preuve formelle assistée par ordinateur (*P. Letouzey*)
- O-minimalité (*T. Servi*)

COURS PRÉLIMINAIRE INTENSIF DE LOGIQUE

(Du 1 au 11 septembre 2015)

Marie Hélène MOURGUES

PROGRAMME

Calcul des propositions : tables de vérité, tautologies, formes normales, compacité.

Calcul des prédicats : langages du premier ordre, termes, formules, modèles ; satisfaction d'une formule dans un modèle ; sous-structures ; isomorphismes ; équivalence élémentaire.

Théorie des ensembles : axiomes de Zermelo-Frænkel ; cardinaux ; théorèmes de Cantor et de Cantor-Bernstein ; ensembles finis, ensembles dénombrables.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. CORI & D. LASCAR : *Logique mathématique : cours et exercices* (nouvelle édition, Dunod, 2 tomes, 2003, chapitres 1, 3, 7).
- [2] P. HALMOS : *Introduction à la théorie des ensembles* (Gauthiers-Villars, 1967 ; réimpression : Jacques Gabay, 1997). Version originale : *Naïve Set Theory*, (Van Nostrand, 1960, dernière édition : Springer, 1998)

**COURS FONDAMENTAL DE LOGIQUE MATHÉMATIQUE I :
THÉORIE DES MODÈLES ET THÉORIE DES ENSEMBLES, INCOMPLÉTUDE**

Todor TSANKOV

PROGRAMME

Éléments de théorie des modèles :

- Compacité ; extensions élémentaires ; théorèmes de Löwenheim-Skolem
- méthode des diagrammes ; théorèmes de préservation ; élimination des quanteurs ; décidabilité de quelques théories axiomatiques
- ultraproducts ; théorème de Los
- espace des types ; omission des types ; ω -catégoricité ; théorème de Ryll-Nardzewski

Éléments de théorie des ensembles axiomatique :

- ordinaux ; récurrence transfinie ; axiome du choix et énoncés équivalents
- cardinaux ; arithmétique des cardinaux infinis
- axiome de fondation ; hiérarchie de von Neumann ; schéma de réflexion
- quelques résultats de cohérence relative

Incomplétude :

- arithmétique formelle : axiomes de Peano (faible) ; arithmétisation de la logique
- théorèmes d'indécidabilité ; premier théorème d'incomplétude de Gödel
- second théorème d'incomplétude de Gödel

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C.C. CHANG & H.J. KEISLER, Model Theory, North-Holland, 1990.
- [2] R. CORI & D. LASCAR, Logique mathématique: cours et exercices, Dunod, 2 tomes, 2003.
- [3] W. HODGES, Model Theory, Cambridge University Press, 1993.
- [4] J.L. KRIVINE, Théorie des Ensembles, Cassini, 1998.
- [5] K. KUNEN, Set Theory. An Introduction To Independence Proofs, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland, 1980. (Une version plus récente, légèrement changée, existe: Set Theory, Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations, College Publications, 2011.)
- [6] B. POIZAT, Cours de Théorie des Modèles, Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, 1985, distribué par Offilib. (Il existe aussi une version anglaise: A course in Model Theory: An introduction to Contemporary Mathematical Logic, Springer Verlag, 2000.)
- [7] J.R. SHOENFIELD, Mathematical Logic, Addison-Wesley, 1967. (Reprint: A. K. Peters Ltd., Massachusetts, 2001.)
- [8] K. Tent et M. Ziegler, A Course in Model Theory, Lecture Notes in Logic, Cambridge University Press, 2012.

COURS FONDAMENTAL DE LOGIQUE MATHÉMATIQUE II : THÉORIE DE LA DÉMONSTRATION, CALCULABILITÉ, COMPLEXITÉ

Hervé FOURNIER et Thierry JOLY

PROGRAMME

Théorie de la démonstration :

- Théorème de complétude par les témoins de Henkin pour la déduction naturelle et le calcul des séquents
- Déduction naturelle du premier ordre : Système NJ. Logique intuitionniste et son interprétation BHK. Élimination des coupures de NJ. Propriétés de la sous-formule et du témoin existentiel dans NJ, puis dans HA (arithmétique intuitionniste).
- Calcul des séquents du premier ordre : Calculs LJ et LK. Élimination des coupures et théorème du séquent médian. Théorème de Herbrand.
- Lambda-calcul. Propriétés de confluence et de standardisation. Représentation des fonctions récursives. Système T. Correspondance de Curry-Howard. Réalisabilité, correction des programmes et propriété de normalisation forte.

Calculabilité :

- Fonctions récursives et fonctions calculables par machine
- Caractérisation logique des fonctions calculables
- Théorème smn et théorèmes de point fixe
- Notions de réduction et problèmes indécidables

Complexité :

- Classes de complexité en temps ; théorème de hiérarchie
- Temps non-déterministe, classe NP, complétude du problème SAT (théorème de Cook-Levin)
- Classes en espace : hiérarchie ; lien entre espace déterministe et non-déterministe (théorème de Savitch) ; clôture par complément des classes non-déterministes (théorème d'Immerman Szelepcsényi)
- Classes probabilistes, hiérarchie polynomiale
- Comptage : complétude du permanent, théorème de Toda (le comptage est aussi difficile que la hiérarchie polynomiale)
- Introduction au théorème PCP

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Sanjeev Arora, Boaz Barak. Computational Complexity: A Modern Approach. Cambridge, 2009.
- [2] René Cori, Daniel Lascar. Logique mathématique, tome 2 : Fonctions récursives, théorème de Gödel, théorie des ensembles, théorie des modèles. Dunod, 2003.
- [3] René David, Karim Nour, Christophe Raffalli. Introduction à la logique -- Théorie de la démonstration. Dunod, 2004.
- [4] J.-L. KRIVINE : Lambda-calcul : Types et Modèles (Masson, 1990, ou E. HORWOOD : Lambda-calculus : types and models -- version augmentée, en anglais, 1992).
- [5] Christos Papadimitriou. Computational Complexity. Addison-Wesley, 1994.
- [6] Sylvain Perifel. Complexité algorithmique. Ellipses, 2014.

GROUPE DE TRAVAIL SUR LES COURS FONDAMENTAUX

Sedki BOUGHATTAS, Thierry JOLY & Patrick SIMONETTA

Ces séances seront animées essentiellement par les étudiants eux-mêmes. L'objectif est double. Il s'agit d'une part de permettre aux participants, par la résolution d'exercices et problèmes, de s'assurer d'une bonne compréhension du cours. D'autre part, les étudiants auront l'occasion de s'astreindre à rédiger soigneusement et s'exerceront à faire des exposés oraux devant leurs collègues.

Étant donné le volume horaire, il est évident que seule une partie du programme pourra être couverte dans ce groupe de travail.

THÉORIE DES MODÈLES : OUTILS CLASSIQUES

Françoise POINT

Ce cours supposera connues les notions de théorie des modèles et de théorie des ensembles (ordinaux, cardinaux) du cours fondamental 1.

PROGRAMME

- (1) Constructions de Fraïssé.
- (2) Modèles saturés.
- (3) Imaginaires.
- (4) Modèles d'Ehrenfeucht-Mostowski (suites d'indiscernables).
- (5) Paires de Vaught, ensembles fortement minimaux, prégéométries.
- (6) Théorème de catégoricité de Morley
- (7) Rang de Morley, rang de Cantor-Bendixon.
- (8) Types définissables, héritiers et co-héritiers.
- (9) Illustration dans les corps différentiellement clos de caractéristique 0.
- (10) Théories sans la propriété de l'indépendance (e.g. la théorie des corps réels-clos).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B Buechler S., Essential Stability Theory, Springer, 1996.
- [2] Hodges, W., Model theory, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 42, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [3] Marker, D., Model theory, An introduction, Graduate Texts in Mathematics, 217, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [4] Marker, D., Messmer, M., Pillay, A., Model theory of fields (second edition), Lecture Notes in Logic, 5, Association for Symbolic Logic, La Jolla, CA, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2006.
- [5] Pillay A., An introduction to stability theory, Clarendon Press, Oxford, 1983. [Autre édition : édition Dover].
- [6] Poizat B., Cours de théorie des modèles, 1985, Nur Al-Mantiq Wal-Ma'rifah. [Version anglaise éditée chez Springer en 2000.]
- [7] Simon, P., A guide to NIP theories, Lecture Notes in Logic, Cambridge University Press, 2015.
- [8] Tent K., Ziegler M., A course in Model Theory, Lecture Notes in Logic, Cambridge University Press, 2012.

THÉORIES DES MODÈLES DES CORPS VALUÉS

Martin HILS

Les travaux de Robinson sur les corps valués algébriquement clos (ACVF) et surtout, dans les années 60, les résultats fameux d'Ax-Kochen et Ershov montrent que la théorie des modèles fournit des outils bien adaptés à l'étude des corps valués, en particulier des corps valués henséliens (de caractéristique résiduelle 0) : certaines classes de problèmes sur le corps valué se réduisent à des problèmes qui ne portent que sur le groupe des valeurs ainsi que sur le corps résiduel.

Ces développements concernent plutôt des aspects 'arithmétiques'. Depuis une dizaine d'années, un point de plus 'géométrique' prévaut en théorie des modèles des corps valués. Les travaux de Haskell, Hrushovski et Macpherson [3] sont à l'origine de cette évolution : classification des imaginaires ; utilisation de concepts plus poussés de théorie des modèles pure (stabilité, NIP).

Dans le cours, nous proposons de traiter ces deux aspects de la théorie des modèles des corps valués. La théorie des corps valués étant un sujet assez vaste, nous sommes contraints d'accepter certains résultats fondamentaux d'algèbre sans preuve, afin de pouvoir mettre l'accent sur les liens entre la théorie des modèles et les résultats provenant de l'algèbre.

PROGRAMME

1) Préliminaires : Quelques résultats fondamentaux d'algèbre sur les corps valués

- Théorème de Chevalley et Théorème de conjugaison pour les extensions des valuations
- Construction et propriétés de la hensélisée
- Théorie de Kaplansky : suites pseudo-convergeantes et corps valués maximale-ment complets
- Coarsening de valuations

2) Elimination des quanteurs dans ACVF (Théorème de Robinson)

3) Théorie des modèles des corps valués henséliens de caractéristique résiduelle 0

- Théorème de Pas : Élimination des quanteurs du corps dans le langage de Denef-Pas
- Principe d'Ax-Kochen-Ershov
- Application du principe d'AKE : Solution approximative de la conjecture d'Artin

4) Théories des modèles des nombres p-adiques

- Décidabilité des nombres p-adiques
- Élimination des quanteurs dans le langage de Macintyre

5) Théorie des modèles géométrique de ACVF

- Classification des imaginaires de ACVF dans les sortes géométriques de Haskell-Hrushovski-Macpherson (en suivant la preuve dans [4])
- Description de la partie stable et de la partie Gamma-interne dans ACVF

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Zoé Chatzidakis, "Théorie des modèles des corps valués", notes de cours (2008). (Disponible à <http://www.logique.jussieu.fr/~zoe/M208/cours08.pdf>.)
- [2] Antonio J. Engler et Alexander Prestel, "Valued fields", Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin 2005.
- [3] Deirdre Haskell, Ehud Hrushovski et Dugald Macpherson, "Definable sets in algebraically closed valued fields : elimination of imaginaries", J. Reine Angew. Math. 597, 175-236 (2006).
- [4] Will Johnson, "On the proof of elimination of imaginaries in algebraically closed valued fields", prépublication, arXiv:1406.3654 [math.LO] (2014).
- [5] Lou van den Dries, "Lectures on the model theory of valued fields", in : 'Model Theory in Algebra, Analysis and Arithmetic : Cetraro, Italy 2012', Editors : H. Dugald Macpherson, Carlo Toffalori (Lecture Notes in Mathematics / C.I.M.E. Foundation Subseries), Springer-Verlag, Berlin 2014

FORCING POUR LES MATHÉMATIENS

Boban VELICKOVIC

La méthode de 'forcing' a été introduite par Paul Cohen en 1963 afin de démontrer l'indépendance de l'Hypothèse du Continu (HC) et l'Axiome du Choix (AC) des axiomes standards ZFC de la théorie des ensembles.

Par la suite, cette méthode a été utilisée pour démontrer de nombreux résultats d'indépendance en théorie des ensembles et d'autres domaines de mathématiques, mais aussi comme outil pour démontrer des théorèmes directement dans ZFC.

Elle est actuellement au cœur du programme de Gödel dont le but est la recherche des nouveaux axiomes pour les mathématiques.

Le but de ce cours est l'introduction au forcing et ses applications en différents domaines de mathématiques : topologie, algèbre commutative, théorie des C^* -algèbres, etc.

PROGRAMME

- Rappel sur les bases de la théorie des ensembles : cardinaux, ordinaux, ordres, algèbres de Boole, etc.
- Modèles de ZFC, réflexion, relativisation, l'univers constructible
- Notions de forcing et extensions génériques, théorème fondamental de forcing
- Applications I : l'Hypothèse du Continu et l'Axiome de Choix
- Applications II : le principe 'diamant', arbres de Souslin, automorphismes de \aleph_N \setminus \aleph_N, problème de Whitehead, problème de Naimark
- Forcing itéré : l'axiome de Martin et ses applications, l'axiome de forcing propre (PFA)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] T. Jech Set Theory (Springer Verlag 2002)
- [2] J.-L. Krivine Théorie des ensembles (Cassini, 1998)
- [3] K. Kunen, Set theory, an introduction to independence results (North Holland, 1983)
- [4] N. Weaver, Forcing for mathematicians, (World Scientific, 2014)

THÉORIE DESCRIPTIVE DES ENSEMBLES

François Le Maître

En théorie descriptive des ensembles classique, on s'intéresse aux ensembles apparaissant naturellement dans divers domaines des mathématiques, notamment l'analyse fonctionnelle, les systèmes dynamiques ou encore la théorie des groupes. Un des objectifs est d'étudier leur complexité. Par exemple, on peut classer les sous-ensembles boréliens des réels selon le nombre d'étapes qui sont nécessaires pour les obtenir à partir d'ensembles ouverts en effectuant des unions dénombrables et des passages au complémentaire.

Le cadre général est celui des espaces polonais, où le théorème de Baire est un outil puissant. On s'intéressera d'abord aux sous-ensembles boréliens des espaces polonais, dont on verra qu'ils sont naturellement hiérarchisés par les ordinaux dénombrables. Ensuite viennent les images via une application borélienne de boréliens (ensembles analytiques) et leurs complémentaires (ensembles coanalytiques). On verra notamment une méthode permettant de montrer qu'un ensemble est coanalytique mais non borélien.

Le cours se terminera par une application récente de cette méthode : une preuve non constructive de l'existence de groupes moyennables non élémentaires. Les groupes moyennables forment une classe naturelle de groupes, définie par von Neumann afin de mieux comprendre le paradoxe de Banach-Tarski. Le problème de l'existence de groupes moyennables non élémentaires est resté ouvert pendant trente ans avant d'être résolu par Grigorchuk en 1984. La preuve non constructive que nous présenterons est due à Wesolek et Williams. Ils ont montré que les groupes moyennables forment un ensemble borélien, tandis que les groupes élémentairement moyennables forment un ensemble coanalytique non borélien.

PROGRAMME

I/ Espaces polonais (16h)

- Définition et premières propriétés
- Théorème de Baire et applications
- Espace de Cantor, espace de Baire
- Hiérarchie borélienne

II/ Boréliens standards (8h)

- Exemple de l'espace des fermés d'un espace polonais
- Théorème de sélection
- Raffinements de topologie
- Théorème de Schröder-Bernstein borélien, unicité

III/Ensembles analytiques et coanalytiques (12h)

- Théorème de séparation de Lusin
- Arbres bien fondés, rang
- Rang coanalytique

IV/ Application : groupes moyennables non élémentaires (12h)

- Espace des groupes marqués
- Groupes moyennables, groupes moyennables élémentaires
- Une condition de chaîne pour les groupes moyennables élémentaires
- Théorème de plongement de Hall
- Preuve de l'existence de groupes moyennables non élémentaires

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Kechris, A. S. Classical descriptive set theory. Graduate Texts in Mathematics, 156. Springer-Verlag
- [2] Melleray, J. Théorie descriptive des groupes. <http://math.univ-lyon1.fr/~melleray/M2-09.pdf>
- [3] Srivastava, S. M. A course on Borel sets. Graduate Texts in Mathematics, 180. Springer-Verlag
- [4] Wesolek, P. et Williams, J. Chain conditions, elementary amenable groups, and descriptive set theory. <http://arxiv.org/abs/1410.0975v1>

PREUVES ET PROGRAMMES : OUTILS CLASSIQUES

Alexis SAURIN & Christine TASSON

La théorie de la démonstration a connu au moins deux évolutions majeures au cours du siècle dernier suite aux théorèmes d'incomplétude de Gödel. La première a eu lieu dans les années 30, immédiatement après les résultats d'incomplétude, avec l'introduction et l'étude de la déduction naturelle et du calcul des séquents par Gentzen et du lambda-calcul par Church. Church montrait alors l'indécidabilité du calcul des prédicats via le lambda-calcul tout en introduisant un modèle de calcul universel tandis que Gentzen déduisait la consistance de divers systèmes logiques comme corollaire de l'élimination des coupures en calcul des séquents.

La seconde étape a eu lieu dans les années 60 avec la mise en évidence progressive, par le biais de la correspondance de Curry-Howard, des liens profonds entre preuves et programmes, depuis la correspondance entre lambda-calcul simplement typé et déduction naturelle propositionnelle minimale jusqu'aux diverses extensions de cette correspondance au second ordre, à la logique classique et jusqu'à l'émergence de la notion de linéarité en théorie de la démonstration. La logique linéaire a profondément renouvelé les liens entre théorie de la démonstration et théorie de la programmation, conduisant à ce qu'on peut aujourd'hui appeler la «logique de programmation».

Le cours fondamental a traité de la première étape. Ce cours sera consacré aux développements depuis les années 60 et présentera les outils classiques pour l'étude de la correspondance de Curry-Howard. Après quelques rappels et compléments du cours fondamental, le cours se concentrera sur deux concepts fondamentaux, le second-ordre et la linéarité, et à leurs développements en logique de la programmation. On appliquera notamment les résultats du cours à l'étude de PCF, un langage de programmation idéalisé.

PROGRAMME

- Introduction et compléments (rappels sur le lambda-calcul et la théorie de la démonstration, interprétation du lambda-calcul simplement typé dans une catégorie cartésienne fermée)
- Second-ordre (Système F, Logique et arithmétique du second-ordre, théorème de normalisation forte, interprétation du système F dans les espaces cohérents et décomposition linéaire)
- Logique linéaire (calcul des séquents linéaire, réseaux de preuves et correction, élimination des coupures, sémantique catégorique de LL, traductions linéaires du lambda-calcul, focalisation et polarisation, logiques allégées et complexité, interprétations interactives)
- PCF (syntaxe et sémantique, le problème de la complète adéquation, sémantique des jeux)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. AMADIO, P.-L. CURIEN : Domains and lambda-calculi (Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 46, Cambridge University Press, 1998).
- [2] P.-L. CURIEN, H. HERBELIN, J.-L. KRIVINE, P.-A. MELLIES : Interactive Models of Computation and Program Behavior (Panorama et Synthèses, Société mathématique de France, 2009).
- [3] R. DAVID, K. NOUR, C. RAFFALLI : Introduction à la logique -- Théorie de la démonstration (Sciences Sup, Dunod, 2004).
- [4] J.-Y. GIRARD, Y. LAFONT & P. TAYLOR : Proofs and Types (Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 7, Cambridge University Press, 1989, disponible sur la page de P. Taylor).
- [5] J.-Y. GIRARD: Le Point Aveugle -- Cours de logique, Tomes 1 & 2 (Collection Visions des Sciences, Hermann, 2006-2007).
- [6] J.-L. KRIVINE : Lambda-calcul : Types et Modèles (Masson, 1990, ou E. HORWOOD : Lambda-calculus : types and models -- version augmentée, en anglais, 1992).
- [7] B.C. PIERCE : Types and Programming Languages (MIT Press, 2002).

CONTENU CALCULATOIRE DES PREUVES DE LA LOGIQUE CLASSIQUE

Hugo HERBELIN

La correspondance dite de Curry-Howard souligne que les preuves ont la même structure qu'un programme, fournissant une incarnation calculatoire au théorème d'élimination des coupures de Gentzen. Longtemps cantonnée au cas de la logique intuitionniste, dans la foulée du slogan de Brouwer qu'une preuve devrait être vue comme un processus de construction, cette correspondance a été étendue au cas de la logique classique au début des années 90. Ce cours posera les bases techniques des recherches actuelles visant à étendre la correspondance preuve-programme encore quelques crans plus loin. On abordera tout autant le style direct (une preuve calcule) que l'approche par réalisabilité (une preuve se découple en un programme et une preuve de correction de ce programme).

PROGRAMME

La correspondance preuve-programme pour la logique classique

- Opérateurs de contrôle (call-cc, abort, C, ...) et axiomes classiques (loi de Peirce, tiers-exclu, ...)
- Lambda-calculs pour la logique classique : lambda-mu-calcul et déduction naturelle classique, système mu-mu-tilde et LKtq
- Sémantiques opérationnelles de la logique classique : appel par nom et LKT, appel par valeur et LKQ
- L'interprétation de la logique classique en logique intuitionniste et ses limites : polarisation, traductions par double négation et par passage de continuation, quantification existentielle forte
- Modèles catégoriques de la logique classique calculatoire

Réalisabilité intuitionniste et classique

- Réalisabilité de Kleene
- Réalisabilité modifiée de Kreisel
- Interprétation fonctionnelle de Gödel
- Internalisation de la réalisabilité (indépendance des prémisses, principe de Markov, axiome du choix intensionnel)
- Réalisabilité classique de Krivine
- Modèles catégoriques de la réalisabilité

Extensions de l'interprétation calculatoire de la logique classique

- Délimiteurs de contrôle et A-traduction de Friedman
- Affectation mémoire et forcing
- Application au contenu calculatoire des théorèmes de complétude des calculs des prédicats intuitionniste et classique

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.Y. GIRARD, Y. LAFONT & P. TAYLOR : Proofs and Types (Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 7, Cambridge University Press, 1989).
- [2] J.Y. GIRARD : Le Point Aveugle (Cours de Logique, Tomes 1 & 2, Collection Visions des Sciences, Hermann, 2006-2007).
- [3] U. KOHLENBACH : Applied Proof Theory: Proof Interpretations and their Use in Mathematics (Springer Monographs in Mathematics, 2008).
- [4] J.-L. KRIVINE : Lambda-calcul, types et modèles (Masson, 1990).
- [5] M. SØRENSEN, P. URZYCZYN : Lectures on the Curry-Howard Isomorphism (Volume 149, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 2006).

AUTOMATES SUR MOTS FINIS OU INFINIS

Didier CAUCAL & Olivier FINKEL

L'objectif de ce cours est de présenter les résultats fondamentaux et les problèmes actuels en théorie des automates et des langages formels sur les mots finis ou infinis, sujet central en informatique théorique.

En particulier, on présentera la hiérarchie de Chomsky de langages de mots finis formée des langages rationnels, algébriques, contextuels, et récursivement énumérables, et la hiérarchie infinie des langages indexés, définie par Maslov [6].

Les automates sur mots infinis ont été introduits par Büchi dans les années 1960 pour étudier la décidabilité de la théorie d'un successeur sur les entiers. Ils ont depuis été très étudiés et utilisés pour la spécification et la vérification de systèmes ne terminant pas, comme un système d'exploitation.

La théorie des automates lisant des mots infinis a des liens avec de nombreux domaines, en particulier avec la topologie, la logique, les jeux infinis qui modélisent le comportement d'un système en interaction avec un environnement.

PROGRAMME

Automates sur les mots finis

- Automates finis, expressions régulières, théorème de Kleene
- Automates à pile, grammaires algébriques, langages algébriques, théorème de Muller-Schupp
- Langages contextuels, machines de Turing linéairement bornées
- Langages acceptés par les machines de Turing, langages récursivement énumérables
- Hiérarchie infinie des langages indexés, définie par Maslov, automates à pile de piles, description structurelle de ces automates et théorie au deuxième ordre monadique décidable.

Automates sur les mots infinis

- Automates de Büchi, de Muller, déterminisation, complémentation
- Automates et théorie monadique sur les entiers
- Topologie, théorie descriptive des ensembles, caractérisation de certaines classes d'automates
- Jeux infinis, jeux de parité, jeux sur les graphes finis, existence et construction de stratégies gagnantes effectives dans ces jeux
- Extensions possibles : automates temporisés, automates d'arbres infinis, automates sur mots de longueur transfinie ...

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. R. Büchi, On a Decision Method in Restricted Second Order Arithmetic (Logic Methodology and Philosophy of Science, (Proc. 1960 Int. Congr.), Stanford University Press, 1962, p. 1-11).
- [2] O. Carton, Langages Formels (Calculabilité et Complexité, Vuibert, 2014).
- [3] E. Grädel, W. Thomas & T. Wilke (editors) : Automata, Logics, and Infinite Games (A Guide to Current Research, Lecture Notes in Computer Science, Volume 2500, Springer, 2002).
- [4] M. Harrison, Introduction to formal language theory, Addison-Wesley (1978).
- [5] J. Hopcroft et J. Ullman, Introduction to automata theory, languages and computation, Addison-Wesley (1979).
- [6] A. Maslov, The hierarchy of indexed languages of an arbitrary level, Doklady Akademii Nauk SSSR 217, 1013-1016 (1974).
- [7] D. Muller et P. Schupp, The theory of ends, pushdown automata, and second-order logic, Theoretical Computer Science 37, 51-75 (1985).
- [8] D. Perrin & J.-E. Pin, Infinite Words, Automata, Semigroups (Logic and Games, Volume 141 of Pure and Applied Mathematics, Elsevier, 2004).
- [9] L. Staiger, ω -Languages, in Handbook of Formal Languages (Volume 3, edited by G. Rozenberg and A. Salomaa, Springer-Verlag, Berlin, 1997).
- [10] W. Thomas, Automata on Infinite Object (J. Van Leeuwen, ed., Handbook of Theoretical Computer Science, Volume B, Elsevier, Amsterdam, 1990, p. 133-191).
- [11] W. Thomas, Languages, Automata and Logic (Handbook of Formal Languages, Volume 3, edited by G. Rozenberg and A. Salomaa, Springer Verlag, Berlin, 1997).

LOGIQUES ET LANGAGES POUR LA COMPLEXITÉ

Patrick BAILLOT & Arnaud DURAND

Les classes de complexité sont classiquement définies par des modèles de machines et des bornes sur l'utilisation des ressources (le temps et l'espace, par exemple). Cependant pour mieux les comprendre il est tentant de chercher à les caractériser de manière plus déclarative, sans référence aux machines ni aux bornes. La logique se révèle être un outil fondamental pour cela.

Diverses approches ont été proposées dans ce but, reposant soit sur l'idée de décrire ce que l'on peut calculer, soit sur celle de décrire comment on peut calculer. La première voie est celle de la *complexité descriptive*, qui s'appuie sur la théorie des modèles finis. La seconde est celle de la *complexité implicite*, qui se nourrit de la théorie de la démonstration.

Ces caractérisations permettent en retour de définir d'une part des langages de requêtes pour les bases de données avec des bornes de complexité pour l'évaluation des requêtes, d'autre part des langages de programmation avec des bornes de complexité sur le temps d'exécution.

Ce cours propose une introduction croisée aux domaines de la complexité descriptive et de la complexité implicite, en cherchant à dégager leurs principaux concepts, de leurs fondements logiques à leurs déclinaisons dans plusieurs langages.

PROGRAMME

- Caractérisations logiques des classes de complexité : logique existentielle du second-ordre (ESO) et NP (Fagin), fragments de ESO, la logique du premier ordre (FO) et classes de circuits, définissabilité et jeux d'Ehrenfeucht-Fraïssé, bornes inférieures, caractériser le temps polynomial sur les structures non ordonnées.
- Caractérisations par contrôle de l'induction ou de la récursion : logique du second-ordre et prouvabilité pour FP, récursion ramifiée pour FP et PSPACE.
- Caractérisations par contrôle de l'espace de calcul : systèmes de réécriture du 1er ordre, programmes fonctionnels cons-free pour P, méthodes d'interprétations.
- Caractérisations par points-fixes : logiques à points fixes pour P et PSPACE, Datalog, extension de Datalog avec négation, programmes "while".
- Caractérisations par contrôle de la duplication : logique linéaire, logique linéaire élémentaire, pour P, EXPTIME et temps élémentaire.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Stephen Bellantoni, Stephen A. Cook : A New Recursion-Theoretic Characterization of the Polytime Functions. Computational Complexity 2 : 97-110 (1992)
- [2] Kees Doets, Basic Model Theory, CSLI Publications Center for the Study of Language and Information, Stanford, California
- [3] Jean-Yves Girard : Light Linear Logic. Inf. Comput. 143(2) : 175-204 (1998)
- [4] Neil Immerman, Descriptive Complexity, Springer, 1999
- [5] Neil D. Jones : Computability and complexity - from a programming perspective. Foundations of computing series, MIT Press 1997, ISBN 978-0-262-10064-9, pp. I-XVI, 1-466
- [6] Daniel Leivant, Jean-Yves Marion : Ramified Recurrence and Computational Complexity II : Substitution and Poly-Space. CSL 1994 : 486-500
- [7] Leonid Libkin, Elements of finite model theory, Springer, 2004

MODÈLES DE LA PROGRAMMATION

Pierre LETOUZEY

Ce cours propose une mise à niveau en programmation à travers divers styles de conception et d'écriture des programmes : fonctionnel, impératif et objet.

Le cours s'appuiera sur le langage O'Caml autorisant les trois styles évoqués. Il sera accompagné de séances de travaux dirigés en salle machine.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. CHAILLOUX, P. MANOURY & B. PAGANO : *Développement d'applications avec Objective Caml* (O'Reilly, 2000).
- [2] G. COUSINEAU & M. MAUNY : *Approche fonctionnelle de la programmation* (Ediscience, 1995).
- [3] C.A. GUNTER : *Semantics of Programming Languages: structures and techniques. Foundations of Computing* (MIT Press, 1992).
- [4] X. LEROY (with D. Remy, J. Vouillon and D. Doligez) : *The Objective Caml System* (Documentation and user's guide, release 2.02, <http://caml.inria.fr/ocaml>).
- [5] P. WEIS & X. LEROY : *Le Langage Caml* (Inter Edition, 1993).

INITIATION À LA PREUVE FORMELLE ASSISTÉE PAR ORDINATEUR

Pierre LETOUZEY

Depuis plusieurs années, la preuve formelle sur machine se développe.

De nombreux systèmes existent maintenant, tels que Coq, Isabelle, HOL, Mizar, Agda, et bien d'autres encore. Ce cours débutera par un tour d'horizon de ces différents systèmes et de leurs fondements logiques, avant d'étudier plus en détail le fonctionnement de Coq. Les séances pratiques permettront une prise en main de Coq, puis la réalisation de preuves formelles de résultats mathématiques (non-triviaux).

Selon le temps disponible, on pourra éventuellement aborder la certification de petits programmes ML.

Le cours alternera cours magistraux et travaux dirigés en salle machine et se conclura par un projet à réaliser en Coq.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. David, K. Nour et C. Raffalli, Introduction à la logique : théorie de la démonstration, Dunod, Paris, 2001.
- [2] Y. Bertot et P. Castéran, Interactive Theorem Proving and Program Development. Coq'Art : The Calculus of Inductive Constructions. Texts in Theoretical Computer Science. Springer Verlag, 2004.
<http://www.labri.fr/perso/casteran/CoqArt>
- [3] F. Wiedijk ed., The Seventeen Provers of the World, LNCS vol. 3600, Springer Verlag, 2006.
<http://www.cs.ru.nl/~freek/comparison/comparison.pdf>

O-MINIMALITÉ

Tamara SERVI

Ce cours expose les résultats fondamentaux de la théorie des structures o-minimales, avec un accent particulier sur les expansions o-minimales des corps ordonnés.

PROGRAMME

Dans la première partie du cours, on donnera un aperçu des propriétés géométriques des ensembles définissables dans ces structures.

Dans la deuxième partie on illustrera certaines techniques qui ont été utilisées pour établir l'o-minimalité dans des exemples classiques.

En particulier, on expliquera les liens entre o-minimalité, modèle-complétude, élimination des quantificateurs et théorèmes de préparation des fonctions définissables.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. van den Dries. Tame topology and o-minimal structures. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [2] L. van den Dries, A. Macintyre, and D. Marker. The elementary theory of restricted analytic fields with exponentiation. *Ann. of Math. (2)*, 140(1): 183–205, 1994.
- [3] L. van den Dries and P. Speissegger. O-minimal preparation theorems. In *Model theory and applications*, volume 11 of *Quad. Mat.*, pages 87–116. Aracne, Rome, 2002.
- [4] A. Gabrielov. Complements of subanalytic sets and existential formulas for analytic functions. *Invent. Math.*, 125(1):1–12, 1996.
- [5] A. G. Hovanskii. A class of systems of transcendental equations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 255(4):804–807, 1980.
- [6] J.-M. Lion and J.-P. Rolin. Théorème de préparation pour les fonctions logarithmico-exponentielles. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 47(3):859–884, 1997.
- [7] C. Miller, J.-P. Rolin, and P. Speissegger, editors. *Lecture notes on o-minimal structures and real analytic geometry*, volume 62 of *Fields Institute Communications*. Springer, New York, 2012.
- [8] A. Tarski. *A decision method for elementary algebra and geometry*. University of California Press, Berkeley and Los Angeles, Calif., 1951. 2nd ed.
- [9] A. J. Wilkie. Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted Pfaffian functions and the exponential function. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(4):1051–1094, 1996.