théorie descriptive des ensembles

François LE MAÎTRE

M2 LMFI 2015-2016

En théorie descriptive des ensembles classique, on s'intéresse aux ensembles apparaissant naturellement dans divers domaines des mathématiques, notamment l'analyse fonctionnelle, les systèmes dynamiques ou encore la théorie des groupes. Un des objectifs est d'étudier leur complexité. Par exemple, on peut classifier les sous-ensembles boréliens des réels selon le nombre d'étapes qui sont nécessaires pour les obtenir à partir d'ensembles ouverts en effectuant des unions dénombrables et des passages au complémentaire.

Le cadre général est celui des espaces polonais, où le théorème de Baire est un outil puissant. On s'intéressera d'abord aux sous-ensembles boréliens des espaces polonais, dont on verra qu'ils sont naturellement hiérarchisés par les ordinaux dénombrables. Ensuite viennent les images via une application borélienne de boréliens (ensembles analytiques) et leurs complémentaires (ensembles coanalytiques). On verra notamment une méthode permettant de montrer qu'un ensemble est coanalytique mais non borélien.

Le cours se terminera par une application récente de cette méthode : une preuve non constructive de l'existence de groupes moyennables non élémentaires. Les groupes moyennables forment une classe naturelle de groupes, définie par von Neumann afin de mieux comprendre le paradoxe de Banach-Tarski. Le problème de l'existence de groupes moyennables non élémentaires est resté ouvert pendant trente ans avant d'être résolu par Grigorchuk en 1984. La preuve non constructive que nous présenterons est due à Wesolek et Williams. Ils ont montré que les groupes moyennables forment un ensemble borélien, tandis que les groupes élémentairement moyennables forment un ensemble coanalytique non borélien.

Programme

— I/ Espaces polonais (16h) : Définition et premières propriétés ; Théorème de Baire et applications ; Espace de Cantor, espace de Baire ; Hiérarchie borélienne.

— II/ Boréliens standards (8h) : Exemple de l'espace des fermés d'un espace polonais ; Théorème de sélection ; Raffinements de topologie ; Théorème de Schröder-Bernstein borélien, unicité.

— III/Ensembles analytiques et coanalytiques (12h) : Théorème de séparation de Lusin ; Arbres bien fondés, rang ; Rang coanalytique.

— IV/ Application : groupes moyennables non élémentaires (12h) : Espace des groupes marqués ; Groupes moyennables, groupes moyennables élémentaires ; Une condition de chaîne pour les groupes moyennables élémentaires ; Théorème de plongement de Hall ; Preuve de l'existence de groupes moyennables non élémentaires.

Bibliographie

1 Kechris, A. S. Classical descriptive set theory. Graduate Texts in Mathematics, 156. Springer-Verlag

2 Melleray, J. Théorie descriptive des groupes. http ://math.univ-lyon1.fr/ melleray/M2-09.pdf

3 Srivastava, S. M. A course on Borel sets. Graduate Texts in Mathematics,180. Springer-Verlag

4 Wesolek, P. et Williams, J. Chain conditions, elementary amenable groups, and descriptive set theory. http ://arxiv.org/abs/1410.0975v1