Master 2 Logique Mathématique

et Fondements de l'Informatique

Domaine : Sciences, Technologies, Santé

Mention : Mathématiques et Applications

Responsable pédagogique : Arnaud Durand

http://www.math.univ-paris-diderot.fr/m2lmfi/

2012 - 2013

SOMMAIRE

Ce Master 2ème année offre une formation de haut niveau en Logique. Il a pour objectif de former des chercheurs ou ingénieurs de recherche possédant la maîtrise des outils logiques fondamentaux utilisés en Mathématiques et en Informatique.

Cette formation, qui s'intègre dans le cadre du nouveau système LMD, mis en place dans les universités françaises, remplace le DEA de Logique Mathématique et Fondements de l'Informatique de l'Université Paris Diderot.
LMFI est une des spécialités du Master mention Mathématiques et Applications de l'Université Paris Diderot - Paris 7.

Deux parcours sont présents dans la spécialité LMFI, intitulés :

- *Logique Mathématique*
- *Logique et Informatique*

L'équipe pédagogique

Berline Chantal
Boughattas Sedki
Bouscaren Elisabeth
Chailloux Emmanuel
Chatzidakis Zoé
Cori René
Curien Paul-Louis
Delon Françoise
Dickmann Max
Durand Arnaud
Ehrhard Thomas
Faggian Claudia
Finkel Olivier
Fournier Hervé
Hils Martin
Joly Thierry
Khélif Anatole
Krivine Jean-Louis
Labib-Sami Ramez
Lassaigne Richard
Louveau Alain
Malod Guillaume
Manoury Pascal
Mazza Damiano
Melliès Paul-André
Mourgues Marie-Hélène
Oger Francis
Parigot Michel
Point Françoise
Prouté Alain
Raffalli Christophe
Ressayre Jean-Pierre
Rozière Paul
Simonetta Patrick
Sureson Claude
Todorcevic Stevo
Tsankov Todor
Velickovic Boban

Les équipes de recherche organisatrices

Institut de Mathématiques de Jussieu (IMJ), UMR 7586 du CNRS

Preuves, Programmes, Systèmes (PPS) - UMR 7126 du CNRS

Conditions d'admission

Le candidat devra avoir validé une 1ère année de Master (M1), une Maîtrise ou un titre équivalent. Cette première année devra avoir été effectuée dans une spécialité mathématique, informatique, ou logique (dans ce dernier cas, par exemple, dans le cadre d'un master de philosophie).

- **Candidature des étudiants étrangers :**
  Afin de faciliter la mobilité internationale, l'Université Paris Diderot adhère à l'Agence Campus France.
  Nous invitons les étudiants à se renseigner sur le site de Campus France (http://www.campusfrance.org/fr) et à s'inscrire auprès de cet organisme avant mars 2012.

- **Pour toutes les autres candidatures :** Les étudiants doivent déposer une demande de pré-inscription sur le site web : http://sesame.univ-paris-diderot.fr
  Dates limites de préinscription sur Sésame :
  Du 1er avril 2012 au 15 juillet 2012.
  Du 24 août 2012 au 15 septembre 2012.

  Date limite de remise du dossier d'admission : 9 septembre 2012.

  Les dossiers envoyés avant le 8 juillet 2012 bénéficieront d'une réponse mi-juillet, les autres en septembre.

  Date limite d'inscription administrative : 15 octobre 2012.

Pour toute demande de renseignement complémentaire, vous pouvez consulter le site :
http://www.math.univ-paris-diderot.fr/m2lmfi/

ou vous adresser au :

Responsable de la formation : Arnaud DURAND
durand@math.univ-paris-diderot.fr

Adresse postale	Localisation
Université Paris Diderot – Paris 7 UFR de Mathématiques – Secrétariat des Master 2 Site Chevaleret – Case 7012 75205 Paris cedex 13	175 rue du Chevaleret - 75013 Paris 5ème étage, Aile A, bureau 5A-24 01 57 27 91 01

Le secrétariat du M2 : Catherine PRUDLO
catherine.prudlo@univ-paris-diderot.fr

Adresse postale	Localisation
Université Paris Diderot – Paris 7 UFR de Mathématiques – Secrétariat des Master 2 Site Chevaleret – Case 7012 75205 Paris cedex 13	175 rue du Chevaleret - 75013 Paris 5ème étage, Aile C, bureau 5C24 01 57 27 93 06 01 57 27 91 40

Organisation

Le Master 2ème année LMFI se compose de :

- **deux cours fondamentaux** (48h chacun) assortis de **deux groupes de travail** (24h chacun)
- **deux cours d'orientation** (48h chacun) qui peuvent être choisis parmi les enseignements spécialisés décrits dans la présente brochure ou, après accord du responsable, parmi des unités d'un autre M2, par exemple dans le M2 Mathématiques Fondamentales ou dans le MPRI (Master Parisien de Recherche en Informatique).
- **un stage** d'initiation à la recherche,
- **une unité d'ouverture** (voir liste ci-dessous),
- **un cours préliminaire intensif**, facultatif (30h) exposant les pré-requis de logique (voir p. 10) qui est proposé aux étudiants du **3 au 14 septembre 2012.**

Les deux cours fondamentaux débutent le **17 septembre 2012 et s'achèvent le 14 décembre 2012**.
Les examens de ces deux cours ont lieu du **17 au 22 décembre 2012.**
Tous les cours d'orientation ont lieu **du 7 janvier au 5 avril 2013**, les examens correspondants ayant lieu du **15 au 26 avril 2013.**
La fin de l'année universitaire est consacrée au stage d'initiation à la recherche.

La validation de la 2ème année de Master correspond à l'acquisition de 60 crédits ECTS :

- Chaque cours fondamental est crédité de 9 ECTS.
- Chaque cours d'orientation est crédité de 9 ECTS.
- Le stage est crédité de 18 ECTS.
- L'unité d'ouverture, créditée de 6 ECTS, peut être constituée, au choix, à partir de la liste suivante :
  - Modèles de la programmation (fonctionnelle, impérative, objet) (cours et TP sur machine, 24h, 3 ECTS)
  - Initiation à la preuve formelle assistée par ordinateur (cours et TP sur machine, 18h, 3 ECTS)
  - Logique de second ordre et forcing (3 ECTS)
  - Une autre UE d'orientation

L'attribution des ECTS correspondant à chacun des modules précédents est conditionnée par l'obtention, pour ce module, d'une note supérieure ou égale à 10. Cependant une compensation est possible entre les deux notes F_1 et F_2 des cours fondamentaux, sous réserve qu'elles soient toutes deux supérieures ou égales à 7 et que leur moyenne soit supérieure ou égale à 10.

Il est attribué une note finale du M2, qui est la moyenne entre $(F_1+F_2)/2$, O_1, O_2 et S, où O_1 et O_2 sont les notes obtenues aux cours d'orientation et S la note de stage.

Les notes obtenues éventuellement aux modules de l'unité d'ouverture n'interviennent donc pas dans la note finale, mais conditionnent l'obtention des crédits correspondants.

STAGE

Le stage de M2 du LMFI peut s'effectuer :

- soit dans un laboratoire universitaire, par exemple dans une des deux équipes d'accueil : l'équipe de Logique Mathématique ou l'équipe Preuves, Programmes, Systèmes,
- soit dans un autre laboratoire de recherche, après accord du responsable du M2.

Dans tous les cas, il est placé sous la responsabilité d'un enseignant du Master.

Débouchés

La suite naturelle de cette formation est la préparation d'un doctorat, soit en logique mathématique, soit en informatique. Pour un doctorat en informatique, la thèse peut éventuellement être préparée dans une entreprise ou un organisme public de recherche (INRIA, CEA…).

Les débouchés sont des postes d'enseignant-chercheur ou de chercheur :

- soit dans le milieu universitaire (français ou étranger) ou des organismes publics de recherche (CNRS, INRIA, CEA, ONERA, etc.).
- soit dans les services de recherche et développement d'entreprises du monde industriel (EDF, France Telecom, Siemens, EADS, etc.).

Les services de recherche et développement de ces entreprises sont particulièrement demandeurs d'étudiants ayant une forte compétence à la fois mathématique, logique et informatique, leur permettant d'encadrer des ingénieurs travaillant dans les domaines de la certification de logiciels, de la vérification de programmes et de protocoles, ainsi que de la sécurité informatique. Dans certains cas, le recrutement peut s'effectuer directement à l'issue du master 2ème année.

Bourses et/ou logement en résidence universitaire

Le ministère chargé de l'Enseignement supérieur accorde aux étudiants, un certain nombre d'aides gérées par le Crous, en lien avec les universités : bourses sur critères sociaux, aide d'urgence annuelle, bourse de mérite, bourses de mobilité, passeport mobilité, prêts d'honneur, bourses de mérite...

Le guide du dossier social de l'étudiant est disponible à l'adresse :

http://www.univ-paris-diderot.fr/sc/site.php?bc=inscriptions&np=faq&g=m#bourses

Pour de plus amples informations, vous devez prendre contact avec le CNOUS : http://www.cnous.fr

INFORMATIONS COMPLEMENTAIRES

Les étudiants du M2 ont accès à la bibliothèque de Mathématiques-Recherche (à Chevaleret). Ils ont de plus accès à des salles d'informatique.

Le jury du M2 de Logique Mathématique et Fondements de l'Informatique était constitué comme suit pour l'année universitaire 2011-2012 :

DURAND Arnaud,	Professeur à l'Université Paris Diderot - Paris 7, Président
ROZIÈRE Paul,	Maître de Conférences à l'Université Paris Diderot - Paris 7, Vice-Président
MEREL Loïc,	Professeur à l'Université Paris Diderot - Paris 7
CORI René,	Maître de Conférences à l'Université Paris Diderot - Paris 7
EHRHARD Thomas,	Directeur de Recherches CNRS
DELON Françoise,	Directrice de Recherches CNRS

Le Doctorat

La durée conseillée des études doctorales est de trois ans.
Une année supplémentaire peut être accordée après examen du dossier (comprenant un rapport du directeur de thèse prouvant l'avancement des travaux) et autorisation du directeur de thèse, du directeur de l'Ecole Doctorale, et du Président de l'Université.
Le doctorat débute normalement en 6ème année des études universitaires et s'adresse aux étudiants titulaires d'un Master ou d'un diplôme de niveau équivalent.

CONTRAT DOCTORAL (anciennement allocation de recherche)

Il s'agit d'un contrat d'une durée de 3 ans.
L'Ecole Doctorale Sciences Mathématiques de Paris-Centre dispose d'un petit nombre de ces contrats pour les étudiants titulaires du Master et désireux de préparer une thèse de doctorat.

Rémunération (depuis le 1er juillet 2010)

- 1684,93 euros bruts si le doctorant contractuel effectue uniquement de la recherche.
- 2024,70 euros bruts s'il effectue des activités complémentaires, par exemple de l'enseignement.

D'autres types de financements sont possibles : projets ANR, bourses INRIA, allocations de la région Île-de-France...

CONDITIONS D'OBTENTION

L'étudiant qui désire obtenir un contrat doctoral en vue de préparer une thèse doit faire acte de candidature auprès du responsable du M2 au cours de l'année universitaire.
Le jury du M2 établit un classement des dossiers (sur critères scientifiques). L'examen des dossiers a lieu pendant la deuxième quinzaine du mois de juin.
Les étudiants de nationalité étrangère, hors Communauté Européenne, sont invités à se renseigner sur les conditions exigées dans leur cas.

LISTE DES ENSEIGNEMENTS 2012-2013

Cours préliminaire intensif de logique *(M. H. Mourgues)*

Cours fondamentaux

- Théorie des modèles et théorie des ensembles *(T. Tsankov)*
- Calculabilité et incomplétude *(P. Rozière & A. Durand)*

Groupes de travail sur les cours fondamentaux *(S. Boughattas & R. Cori)*

Cours d'orientation

- Théorie de la démonstration *(C. Faggian & D. Mazza)*
- Lambda-calcul et preuves *(T. Ehrhard & A. Saurin)*
- Vérification approchée et complexité (M. de Rougemont)
- Théorie des modèles finis et applications (A. Durand & M. Pinsker)
- Théorie des modèles : outils classiques (P. Simonetta)
- Théorie des modèles et groupes (E. Jaligot)
- Théorie des ensembles (R. Labib Sami)
- Grands cardinaux *(B. Velickovic)*

Cours d'ouverture

- Modèles de la programmation (fonctionnelle, impérative, objet) (E. Chailloux)
- Initiation à la preuve formelle assistée par ordinateur (C. Raffalli)

COURS PRELIMINAIRE INTENSIF DE LOGIQUE

(Du 3 au 14 septembre 2012)

Marie Hélène MOURGUES

PROGRAMME

Calcul des propositions : tables de vérité, tautologies, formes normales, compacité.

Calcul des prédicats : langages du premier ordre, termes, formules, modèles ; satisfaction d'une formule dans un modèle ; sous-structures ; isomorphismes ; équivalence élémentaire.

Théorie des ensembles : axiomes de Zermelo-Frænkel ; cardinaux ; théorèmes de Cantor et de Cantor-Bernstein ; ensembles finis, ensembles dénombrables.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. CORI & D. LASCAR : *Logique mathématique : cours et exercices* (nouvelle édition, Dunod, 2 tomes, 2003, chapitres 1, 3, 7).

[2] P. HALMOS : *Introduction à la théorie des ensembles* (Gauthiers-Villars, 1967 ; reimpression : Jacques Gabay, 1997). Version originale : *Naïve Set Theory*, (Van Nostrand, 1960, dernière édition : Springer, 1998)

COURS FONDAMENTAL DE LOGIQUE MATHEMATIQUE I :

THEORIE DES MODELES ET THEORIE DES ENSEMBLES

Todor TSANKOV

PROGRAMME

Calcul des prédicats : théorèmes de complétude et de compacité.

Eléments de théorie des modèles : extensions élémentaires, théorèmes de Löwenheim-Skolem, méthode des diagrammes ; théorèmes de préservation ; décidabilité de quelques théories axiomatiques ; ultraproduits, théorème de Los.

Théorie des ensembles : ordinaux ; récurrence transfinie ; axiome du choix et énoncés équivalents ; arithmétique des cardinaux infinis ; axiome de fondation ; schéma de réflexion ; résultats élémentaires de cohérence relative.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C.C. CHANG & H.J. KEISLER : *Model Theory* (North-Holland, 1990).

[2] R. CORI & D. LASCAR : *Logique mathématique : cours et exercices* (Dunod, 2 tomes, 2003).

[3] W. HODGES : *Model Theory* (Cambridge University Press, 1993).

[4] J.L. KRIVINE : *Théorie des Ensembles* (Cassini, 1998).

[5] B. POIZAT : *Cours de Théorie des Modèles* (Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, 1985, distribué par Offilib ; il existe aussi une version anglaise : *A course in Model Theory : An introduction to Contemporary Mathematical Logic*, by Bruno Poizat, translated by Moses Klein, Springer Verlag, 2000).

COURS FONDAMENTAL DE LOGIQUE MATHEMATIQUE II :

CALCULABILITE ET INCOMPLETUDE

Paul ROZIERE & Arnaud DURAND

PROGRAMME

Calculabilité : fonctions récursives et fonctions calculables par machine ; caractérisation logique des fonctions calculables ; théorème smn et théorèmes de point fixe ; notions de réduction et problèmes indécidables. Introduction à la complexité : classes, réductions, complétude.

Arithmétique formelle : axiomes de Peano et sous-systèmes faibles ; arithmétisation de la logique ; théorèmes d'indécidabilité ; les théorèmes d'incomplétude de Gödel.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. BARWISE (ed) : *Handbook of Mathematical Logic* (North-Holland, 1977-1999).

[2] R. CORI & D. LASCAR : *Logique mathématique : cours et exercices* (Dunod, 2 tomes, 2003).

[3] R. LASSAIGNE & M. de ROUGEMONT : *Logique et Complexité* (Hermès, 1996).

[4] M. MACHTEY & P. YOUNG : *An introduction to the General Theory of Algorithms* (North Holland, 1978).

[5] J.R. SCHOENFIELD : *Mathematical Logic* (Addison-Wesley, 1967. Assoc. for Symb. Logic, 2001).

[6] R. SMULLYAN : *Les Théorèmes d'Incomplétude de Gödel* (Masson, 1993).

[7] O. GOLDREICH : *Computational Complexity : A Conceptual Perspective* (Cambridge University Press, 2008).

[8] N.D. JONES : *Computability and Complexity : From a Programming Perspective* (MIT Press, 1997).

GROUPE DE TRAVAIL SUR LES COURS FONDAMENTAUX

Sedki BOUGHATTAS & René CORI

Ces séances seront animées essentiellement par les étudiants eux-mêmes. L'objectif est double. Il s'agit d'une part de permettre aux participants, par la résolution d'exercices et problèmes, de s'assurer d'une bonne compréhension du cours. D'autre part, les étudiants auront l'occasion de s'astreindre à rédiger soigneusement et s'exerceront à faire des exposés oraux devant leurs collègues.

Etant donné le volume horaire, il est évident que seule une partie du programme pourra être couverte dans ce groupe de travail.

THEORIE DE LA DEMONSTRATION

Claudia FAGGIAN & Damiano MAZZA

La théorie de la démonstration traite de la formalisation et de l'analyse du raisonnement logique. Puisant ses concepts fondamentaux dans les travaux de Gentzen dans les années 1930, elle cherche à mettre en évidence le contenu calculatoire des preuves à travers l'étude de leur structure et de leur dynamique (élimination des coupures). Dans les années 1960, cette approche est illustrée de manière spectaculaire par la « correspondance de Curry-Howard » reliant les preuves aux programmes via le lambda-calcul. Cette dernière est le point de départ des applications en informatique de la théorie de la démonstration (restreinte alors au cas de la logique intuitionniste, i.e. sans le principe du tiers-exclu). L'introduction de la logique linéaire a permis de donner une nouvelle analyse du panorama de la théorie de la démonstration et a été suivie par l'extension de la correspondance de Curry-Howard à la logique classique.
Le cours sera consacré à l'étude des outils fondamentaux de la théorie de la démonstration et aux développements récents basés sur la logique linéaire et la logique classique. Ce sont les moteurs de ce qu'il est maintenant convenu d'appeler la « logique de programmation ».

PROGRAMME

Logiques classique et intuitionniste :

- Calcul des séquents. Élimination des coupures.
- Déduction naturelle.
- Interprétations calculatoires (Curry-Howard).
- Sémantiques catégorique et dénotationnelle.

Logique linéaire :

- Calcul des séquents et réseaux de preuves.
- Traductions des logiques intuitionniste et classique.
- Modèles.
- Caractérisation de classes de complexité.
- Polarisation et logique classique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.Y. GIRARD, Y. LAFONT & P. TAYLOR : *Proofs and Types* (Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 7, Cambridge University Press, 1989).

[2] J.Y. GIRARD, Y. LAFONT & L. REGNIER (editors) : *Advances in Linear Logic* (London Mathematical Society Lecture Notes Series 222, Cambridge University Press, 1995).

[3] J.Y. GIRARD : *Le Point Aveugle* (Cours de Logique, Tomes 1 & 2, Collection Visions des Sciences, Hermann, 2006-2007).

[4] J.-L. KRIVINE : Lambda-calcul, types et modèles, (Masson, 1990)

LAMBDA-CALCUL ET PREUVES

Thomas EHRHARD & Alexis SAURIN

Le lambda-calcul, introduit par Church dans les années 30 et sujet de recherche très actif depuis lors, se situe à la frontière de l'informatique et de la logique : il est à la fois un formalisme de représentation des fonctions récursives, un système de notation pour les démonstrations intuitionnistes rendant compte de l'élimination des coupures, et la base théorique des langages de programmation fonctionnels. On présentera les propriétés syntaxiques fondamentales du lambda-calcul pur, les notions catégoriques nécessaires à la définition des modèles du lambda-calcul ainsi que des constructions de modèles concrets, et des systèmes de lambda-calcul typé. En chemin, les notions nécessaires de logique intuitionniste, classique et linéaire seront introduites.

PROGRAMME

- introduction au lambda-calcul pur, beta-reduction, Church-Rosser
- représentation des fonctions récursives
- développements finis, standardisation, arbres de Böhm
- lambda-calcul typé, système F, normalisation forte
- catégories cartésiennes fermées, objets réflexifs
- un modèle concret : sémantique de Scott
- sémantique vue comme typage avec intersections

Des thèmes d'ouvertures seront ensuite abordés, parmi des sujets tels que les extensions classiques du lambda-calcul (syntaxe et sémantique), les liens entre machines abstraites et calcul des séquents, effets et monades...

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. AMADIO, P.-L. CURIEN : Domains and lambda-calculi, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 46, Cambridge University Press, 1998.

[2] H.-P. BARENDREGT : *The lambda-calculus, its syntax and semantics* (Studies in Logic, vol. 103, North-Holland, 1984).

[3] J.-Y. GIRARD, Y. LAFONT & P. TAYLOR : Proofs and Types (Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 7, Cambridge University Press, 1989, disponible sur la page de P. Taylor).

[4] J.-R. HINDLEY & J.-P. SELDIN : Lambda-Calculus and Combinators : an Introduction (with Roger Hindley), Cambridge Univeristy Press, 2008.

[5] J.-L. KRIVINE : *Lambda-calcul : Types et Modèles* (Masson, 1990), ou E. HORWOOD : *Lambda-calculus : types and models* (version augmentée, en anglais, 1992).

[6] J.-C. MITCHELL : *Foundations for Programming Languages* (MIT Press, 1996).

VERIFICATION APPROCHEE ET COMPLEXITE

Michel DE ROUGEMONT

La vérification consiste à décider si une structure satisfait une propriété. On peut proposer une preuve classique, qui peut cependant être très longue, en particulier pour une propriété qui n'est pas dans la classe NP. On cherche alors à savoir s'il est possible de montrer à l'aide d'une preuve courte qu'une propriété soit vraie avec grande probabilité. C'est le rôle des preuves interactives et des preuves vérifiables avec grande probabilité qui correspondent aux classes de complexité IP et PCP.

Si on cherche des preuves très rapides, on peut introduire une approximation ε et décider si la structure satisfait la propriété ou si elle est ε-loin de la satisfaire, en utilisant une distance entre structures. Si la structure de taille n est très grande, on peut souhaiter des preuves en temps indépendant de n et dépendant uniquement de ε ou peut-être des preuves en temps log n. On parle alors de Test de propriété. Les applications classiques de ces concepts sont :

- *Des preuves interactives pour des problèmes coNP et PESPACE*
- *Des preuves PCP avec un nombre constant de requêtes pour des problèmes NP,*
- *Des preuves approchées pour des problèmes NP durs ou PESPACE durs*

Les applications informatiques sont :

- *Le Model Checking approché,*
- *Des décisions approchées pour les masses de données,*
- *Des décisions approchées sur des données de flux (Streaming).*

PROGRAMME

1. Rappels sur les classes RP et BPP
2. Preuves interactives, IP : preuve du permanent et de QBF.
3. PCP(r(n),q(n)) : exemples
4. Le théorème PCP
5. Le test de propriétés : graphes, mots, arbres,
6. Les algorithmes de Streaming et la Complexité en Communication

BIBLIOGRAPHIE

[1] Computational Complexity: A Modern Approach, Sanjeev Arora et Boaz Barak, *Cambridge University Press* 2009,

[2] The PCP theorem by gap amplification, Irit Dinur, *Journal of the ACM* **54** (3): 12, 2007.

[3] Logic and Complexity, R. Lassaigne and M. de Rougemont, *Springer* 2004.

THEORIE DES MODELES FINIS ET APPLICATIONS

Arnaud DURAND & Michael PINSKER

La théorie des modèles restreintes aux structures finies est née dans les années 70 et a connu un essor important en grande partie pour les liens forts qu'elle entretient avec la théorie de la complexité ou avec des domaines de l'informatique comme la théorie des bases de données, les contraintes, les jeux et la vérification, etc. Dans ce cours, on présentera les rudiments de cette discipline ainsi que les résultats classiques de complexité descriptive (i.e. de description logique des classes de complexité). Le cours s'étendra ensuite vers les méthodes de non définissabilité (par jeu ou méthodes combinatoires et probabilistes). On s'intéressera aussi à la complexité des problèmes dits de « model-checking » et de requêtes pour certains formalismes logiques naturels (en général, sur des classes de structures particulières : arbres, graphes de degré borné, etc). Enfin, le cours présentera une introduction à la complexité des problèmes de satisfaction de contraintes.

PROGRAMME (non exhaustif)

1. Rappels de logique (logique du premier et du second ordre, logique à point-fixe, définissabilité dans les structures finies) et de complexité.
2. Jeux d'Ehrenfeucht-Fraïssé, localité, k-types, théorèmes de Hanf et Gaifman, résultats de non définissabilité, théorème d'Ajtai.
3. Complexité des problèmes de modèles checking et de requêtes sur FO, MSO, ... Restrictions à des classes de structures particulières (graphes de degré borné, de largeur arborescente bornée, etc). Théorème de Feferman-Vaught et application (retour sur MSO)
4. Problème de requêtes et énumération.
5. Introduction aux problèmes de satisfaction de contraintes

BIBLIOGRAPHIE

[1] Elements of finite model theory, Leonid Libkin, Springer, 2004

[2] Computational Complexity: A Modern Approach, Sanjeev Arora et Boaz Barak, *Cambridge University Press*, 2009,

[3] Descriptive complexity, Neil Immerman, Springer, Graduate Texts in Computer Science.

[4] Logic and Complexity, Richard Lassaigne and Michel de Rougemont, *Springer* 2004.

THEORIE DES MODELES : OUTILS CLASSIQUES

Patrick SIMONETTA

Ce cours supposera connues les notions de théorie des modèles du cours fondamental. Dans une première partie, il abordera certaines des constructions de base en théorie des modèles et les illustrera par des exemples algébriques. La deuxième partie sera consacrée à l'étude des théories $\aleph 1$ - catégoriques et servira comme introduction à la théorie des modèles géométrique.

PROGRAMME

- Espaces des types, modèles saturés, Théorème d'omission des types, modèles atomiques, Théorème de Ryll-Nardzewski
- Va-et-vient infini, élimination des quanteurs,
- Corps algébriquement clos, Théorème d'Ax sur les apllications polynomiales
- Corps réels clos et théories o-minimales
- Théorème de Ramsey, suites indiscernables, modèles d'Ehrenfeucht-Mostowski.
- Rang de Morley, théories ω-stables, ensembles fortement minimaux, Théorème de catégoricité de Morley
- Pré géométries associées aux ensembles fortement minimal
- Théorème de Baldwin-Lachlan sur les théories $\aleph 1$ - catégoriques

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. MARKER, Model theory. An introduction, Graduate Texts in Mathematics 217, Springer Verlag, New York, 202

[2] W. HODGES, Model theory, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 42, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[3] B. POIZAT, Cours de théorie des modèles, Nur alMantiq walMa'arifah, Villeurbanne, 1985.

THEORIE DES MODELES ET GROUPES

Eric JALIGOT

Ce cours prolonge la partie « théorie des modèles » du cours fondamental, avec une orientation vers l'algèbre et plus particulièrement les groupes. Le but sera d'avoir un aperçu des interactions entre les propriétés algébriques et les propriétés modèle-théoriques des groupes, plus typiquement la stabilité.
Nous nous concentrerons en particulier sur les groupes qui sont munis d'une dimension finie, le rang de Morley ou certaines variations, et nous verrons les très nombreuses analogies entre les groupes de rang de Morley fini et les groupes algébriques sur des corps algébriquement clos. Comme la classe des groupes de rang de Morley fini est strictement plus grande que celle des groupes algébriques, nous verrons aussi les phénomènes nouveaux qui apparaissent dans le cadre modèle-théorique par rapport à celui, plus restreint, de la géométrie algébrique.

PROGRAMME

Nous aborderons :

- groupes oméga-catégoriques
- notions générales de stabilité
- conditions de chaînes, groupes Mc…
- composantes connexes, généricité …
- Théorème des Indécomposables
- Groupes de rang de Morley fini et groupes rangés
- Corps, tores, groupes unipotents…

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BOROVIK et A. NESIN : *Groups of finite Morley rank* (Oxford Science Publications, 1994).

[2] B. POIZAT : *Groupes stables* (Lyon, 1987).

[3] F. WAGNER : *Stable groups* (Cambridge University Press, 1997)

THEORIE DES ENSEMBLES

Ramez LABIB-SAMI

Le 8 août 1900, lors du second Congrès International des mathématiques, à Paris, David Hilbert énonça une liste de 23 problèmes mathématiques qui, selon lui, devaient servir de guide pour les recherches à venir dans le nouveau siècle. Le premier problème de cette liste, l'hypothèse du continu de Cantor, a été résolu, en deux temps : par Gödel (1938) qui construisit un modèle interne de l'hypothèse généralisée du continu, et par Paul Cohen (1963), qui a inventé une construction de modèle pour la négation de l'hypothèse de Cantor.

PROGRAMME

Ce cours couvrira principalement les deux constructions de modèles de la théorie des ensembles introduites par Gödel et Cohen :

Modèles internes : principalement, les ensembles constructibles de Gödel, cohérence de l'axiome du choix et de l'hypothèse généralisée du continu, quelques conséquenses de l'axiome de constructibilité.

Forcing : constructions de base ; modèles pour l'indépendance de l'hypothèse du continu, de l'axiome du choix ; modèle de Lévy-Solovay.

BIBLIOGRAPHIE

[1] T.JECH : Set Theory (Springer Verlag, 2002).

[2] J.-L. KRIVINE : Theorie des ensembles (Cassini, 1998).

[3] K. KUNEN : Set Theory (North-Holland, 1983).

[4] A. LEVY : Basic Set Theory (Springer Verlag, 1979).

[5] Y. N. MOSCHOVAKIS : Descriptive Set Theory (North-Holland, 1980).

GRANDS CARDINAUX

Boban VELICKOVIC

Il est bien connu que les axiomes standards de la théorie des ensembles, ZFC, ne décident pas de nombreuses questions importantes en mathématiques. Une façon naturelle pour compléter la théorie ZFC est de rajouter des axiomes de grands cardinaux. Nous allons présenter les principaux de ces axiomes (cardinaux inaccessible, faiblement compact, mesurable, supercompact, etc) et leurs propriétés ainsi que les applications de ces axiomes en d'autres domaines de mathématiques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. JECH : Set theory (Academic Press , 1978.

[2] J.-L. KRIVINE : Théorie des ensembles (Cassini, 1998).

[3] K. KUNEN : Set theory (Academic Press, 1980).

[4] A.LEVY : Basic set theory (Springer Verlag, 1979).

[5] A. KANAMORI : The higher infinite : Large cardinals in set theory from their beginnings (Springer Verlag, 2003)

MODELES DE LA PROGRAMMATION

Emmanuel CHAILLOUX, Pascal MANOURY

Ce cours propose une mise à niveau en programmation à travers divers styles de conception et d'écriture des programmes : fonctionnel, impératif et objet.

Le cours s'appuiera sur le langage O'Caml autorisant les trois styles évoqués. Il sera accompagné de séances de travaux dirigés en salle machine.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. CHAILLOUX, P. MANOURY & B. PAGANO : *Développement d'applications avec Objective Caml* (O'Reilly, 2000).

[2] G. COUSINEAU & M. MAUNY : *Approche fonctionnelle de la programmation* (Ediscience, 1995).

[3] C.A. GUNTER : *Semantics of Programming Languages : structures and techniques. Foundations of Computing* (MIT Press, 1992).

[4] X. LEROY (with D. Remy, J. Vouillon and D. Doligez) : *The Objective Caml System* (Documentation and user's guide, release 2.02, http://caml.inria.fr/ocaml).

[5] P. WEIS & X. LEROY : *Le Langage Caml* (Inter Edition, 1993).

INITIATION A LA PREUVE FORMELLE ASSISTEE PAR ORDINATEUR

Christophe RAFFALLI

3 heures de cours introductif + cours et travaux dirigés en salles machines.

Depuis plusieurs années, la preuve formelle sur machine se développe. Plusieurs systèmes existent : Coq, Isabelle, Mizar...

Dans ce cours, nous utiliserons PhoX pour démontrer des résultats mathématiques (non triviaux) et éventuellement la correction de petits programmes ML.

Un cours de 3 heures introduira les concepts de base qui seront illustrés par une prise en main du système lors de la première séance sur ordinateur. Les autres séances seront consacrées à des exemples plus aboutis en mathématiques (ou en informatique pour ceux qui le désirent) choisis en partie par les étudiants.